Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2024
18.04.2024
Blatt 1

ÜBUNGEN ZU
HÖHERE METHODEN DER ANALYSIS IN DER PHYSIK

Eine ONB von $L^2(\mathbb{R})$ aus Eigenvektoren der Fouriertransformation. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ seien $bf(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})f(x)$, $b^*f(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})f(x)$ und $Nf := b^*bf$. Die Hermite-Funktionen $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch

$$H_0(x) := \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{und, für } n \geq 1: \qquad H_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}b^*H_{n-1}(x).$$

(a) Berechnen Sie $H_n(x)$ für $n \in \{1, 2\}$. Welche Gestalt hat $H_n(x)$ im allgemeinen? Was können Sie über die Parität der H_n aussagen?

(b) Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dass $\langle b^*f, g\rangle = \langle f, bg\rangle$. (Hierbei bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R})$, und die behauptete Gleichung bedeutet, dass der Operator b^* formal der Adjungierte von b ist.) Berechnen Sie ferner den Kommutator $[b, b^*] := bb^* - b^*b$ der Operatoren b und b^*.

(c) Beweisen Sie induktiv:

(i) $NH_n = nH_n$,

(ii) $\langle H_n, H_m\rangle = \delta_{nm}$

(iii) $\widehat{H_n} = (-i)^n H_n$.

(d) Zeigen Sie für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dass

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^j}{j!} \int_{\mathbb{R}} x^j e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)dx.$$

(e) Folgern Sie: Ist $f \in < H_n : n \in \mathbb{N}_0 >^{\perp} \subset L^2(\mathbb{R})$, so ist $f = 0$.

Beachten Sie, dass das Ergebnis in (e) die Vollständigkeit des ONS $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bedeutet.