3.1 Fouriertransformation und temperierte Distributionen

Vorab einige Bemerkungen zur Approximation von L^p-Funktionen durch glatte Funktionen:

(1) Per Konstruktion des Integrals nach einem Maß sind für $1 \le p < \infty$ die $\mathcal{A}$-elementaren Funktionen dicht in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$, kann man sich auf solche Treppenfunktionen beschränken, die aus charakteristischen Funktionen von achsenparallelen Quadern gebildet sind.

Um mit reguläreren Funktionen zu approximieren, beschränken wir uns auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, und setzen für $k \in \mathbb{N}_0$

$$C_0^k(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^k(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt} \}$$

und
$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_0^k(\mathbb{R}^n).$$

Hierbei ist $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ der <u>Träger</u> von f, engl.: support. Eine spezielle Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 . \end{cases}$$

(2) Für $1 \le p < \infty$ ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ $(= C_0^0(\mathbb{R}^n))$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Begründung: Nach (1) ist nur noch zu zeigen, dass man χ_Q (Q Quader) in $\| \ \|_p$ durch $C_0(\mathbb{R}^n)$-Funktionen annähern kann. Dazu setzt man für $0 < \varepsilon \le 1$

$$\chi_{Q,\varepsilon}(x) := \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{dist}(x, Q)\right)_+ .$$

Dann ist $\chi_{Q,\varepsilon} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und es gelten

- $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \chi_{Q,\varepsilon}(x) = \chi_{\overline{Q}}(x)$ punktweise und
- $\chi_{Q,\varepsilon} \le \chi_{Q,1} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Der Lebesguesche Konvergenzsatz liefert

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int |\chi_{Q,\varepsilon} - \chi_Q|^p \, d\lambda^n = 0, \text{ d.h. } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\chi_{Q,\varepsilon} - \chi_Q\|_p = 0.$$

Dieser elementare Schritt ist erforderlich, um den weiterreichenden Approximationssatz für Dirac-Scharen zu beweisen.

<u>Def.</u>: Eine Familie $(k_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ von $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen heißt eine <u>approximative Einheit</u> oder auch <u>Dirac-Schar</u>, wenn gilt:

(1) Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

(2) Es gibt ein $M \ge 0$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(x)|\,dx \le M$.

(3) Für alle $\delta > 0$ ist $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x| > \delta} |k_\varepsilon(x)|\,dx = 0$.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind solche Dirac-Scharen oder -Folgen leicht herzustellen: Man startet mit einer Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} k(x)\,dx = 1$ und definiert

$$k_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(ÜA: Zeigen Sie, dass hierfür (1)-(3) gelten.) Hierbei kann man $k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wählen, in diesem Fall spricht man von einem "Friedrichs-Mollifier".

Für die Faltung mit solchen Dirac-Scharen gilt der folgende

Approximationssatz: Sei $(k_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(1) Ist f beschränkt und

(1.1) gleichmäßig stetig, so gilt $\lim_{\varepsilon\to0} \|k_\varepsilon * f - f\|_\infty = 0$,

(1.2) stetig in $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\lim_{\varepsilon\to0} k_\varepsilon * f(x) = f(x)$.

(2) Ist $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so hat man

$$\lim_{\varepsilon\to0} \|k_\varepsilon * f - f\|_p = 0.$$

Mit Teil (2) dieses Satzes erhält man:

(3) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$.

Begründung: Zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ wählt man $R > 0$ so groß, dass $\|f - f\cdot\chi_{B_R(0)}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nun sei $(k_\delta)_{\delta>0}$ ein Friedrichs-Mollifier. Dann ist $k_\delta * (f\cdot\chi_{B_R(0)}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und für hinreichend kleines $\delta>0$ ist auch $\| k_\delta * (f\chi_{B_R(0)}) - f\chi_{B_R(0)}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soweit die Vorbemerkungen. Jetzt zur Fouriertransformation, die initial auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert wird:

Def.: Für $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt die Funktion $\hat f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, definiert durch

$$\hat f(\xi) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \qquad \left(x\xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j\right)$$

die Fouriertransformierte von f. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n),\ f\mapsto \mathcal{F}f := \hat f$$

heißt die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$

Bem.: Die Abschätzung

$$|\hat f(\xi)| = (2\pi)^{-n/2}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx\right| \le (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

zeigt nicht nur, dass $\hat f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, sondern auch, dass $\mathcal{F}\in L(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ mit Operatornorm $\|\mathcal{F}\|_{1\to\infty}\le(2\pi)^{-n/2}$ gilt. Tatsächlich ist die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion nicht nur beschränkt, sondern es gilt das

Lemma (Riemann-Lebesgue): Für die Fouriertransformierte $\hat{f}$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gelten

(1) $\hat{f}$ ist gleichmässig stetig,

(2) $\lim\limits_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Anmerkungen zum Bew.: Die Stetigkeit von $\hat{f}$ folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. Mit (2) folgt die gleichmäßige Stetigkeit. Für (2) schreibt man

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \cdot (-e^{i\pi}) \cdot \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

$$= -(2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x - \frac{\pi\xi}{|\xi|^2})\xi} f(x)\,dx$$

$$= -(2\pi)^{-n/2} \int e^{-iy\xi} f(y + \tfrac{\pi\xi}{|\xi|^2})\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} \left(f(x) - f(x + \tfrac{\pi\xi}{|\xi|^2})\right) dx$$

Ist jetzt $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, folgt $\lim\limits_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ approximiert man mit einer Folge in $C_0(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Leicht nachzurechnen sind die folgenden Identitäten:

Lemma 1: Es seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$.

(1) Ist $g(x) = f(x-a)$, so gilt $\hat{g}(\xi) = e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi)$.

(2) Ist $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, so gilt $\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda \xi)$.

Die Fouriertransformation verwandelt das Faltungsprodukt in eine punktweise Multiplikation:

„Faltungssatz": Für $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\widehat{f*g}(\xi)=(2\pi)^{n/2}\,\hat f(\xi)\,\hat g(\xi).$$

Bem.: (1) Bew. Fubini + Funktionalgleichung

(2) Falls auch $f\cdot g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt entsprechend

$$\widehat{f\cdot g}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\,\hat f*\hat g(\xi).$$

Grob gesprochen ist die Fouriertransformation bis auf einen Vorzeichenwechsel zu sich selbst invers:

Satz 1 (Fourierinversionsformel): Sind $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\xi}\hat f(\xi)\,d\xi.$$

Bem.: (1) Bew. nicht trivial, hier zu lang.

(2) Die Voraussetzung $\hat f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist nicht redundant.

Bsp.: Für $f(x)=\chi_{(-1,1)}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ ist $\hat f(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}$.

Im Hinblick auf die Invertierbarkeit ist der natürliche Definitionsbereich $L^1(\mathbb{R}^n)$ also nicht optimal. Eine Alternative eröffnet uns das folgende

Lemma 2 (Parsevalsche Identität) Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, (7)

so gilt $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\,d\xi.$$

Bem.: (1) Auch dies hier ohne Bew..

(2) Für $f = g$: $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, also

$$\mathcal{F}\big|_{L^1 \cap L^2} : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2,$$

ist eine Isometrie bezüglich der L^2-Normen auf beiden Seiten. Da $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset_{\text{dicht}} L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, lässt sich diese in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, z. B. durch $\mathcal{F}f := L^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}\chi_{B_R(0)} f$.

Satz von Plancherel: Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\big|_{L^1 \cap L^2} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung,

$$\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Diese ist ein isometrischer Isomorphismus. Für $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Inverse gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1} g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} g(\xi)\,d\xi.$$

(Üblicherweise unterscheidet man nicht zwischen $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\big|_{L^1 \cap L^2}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$, sondern schreibt stets $\mathcal{F}$ oder $\hat{\ }$ bzw. $\mathcal{F}^{-1}$ oder $\check{\ }$ für die Inverse.)

Zum Abschluss der L^1/L^2-Theorie noch ein wichtiges

Bsp. (komplexe Gaussfunktionen): Für $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\beta > 0$ sei $G_\beta(x) := e^{-\beta\frac{|x|^2}{2}}$. $(x \in \mathbb{R}^n)$ Dann ist $G_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n)$

und
$$\widehat{G_\beta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta}^{\,n}} \cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2\beta}}.$$

Bem.: (1) $\sqrt{}$ = Hauptzweig der komplexen Wurzel. Für $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ mit $|\varphi| < \pi$ ist $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\varphi/2}$. Daher ist im Allg. $\sqrt{\beta}^{\,n} \neq \sqrt{\beta^n}$!

(2) $\mathcal{F}G_1 = G_1$, Eigenvektor der FT zum Eigenwert 1.

Argumente: (1) Die Funktion $f(z) = \sqrt{z} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}} dx$ ist auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ komplex d'bar und es gilt $f'(z) = 0$, also: f ist konstant.

(2) $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ ergibt die Konstante, insbesondere hat man $\widehat{G_\beta}(0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (für $n=1$)

(3) Durch Differentiation unter dem Integralzeichen leitet man die gewöhnliche Dgl. $\widehat{G_\beta}'(\xi) = -\frac{\xi}{\beta}\widehat{G_\beta}(\xi)$ her. Zusammen mit der Anfangsbedingung aus (2) ergibt sich die Beh. für $n = 1$.

(4) Fubini und die Funktionalgleichung exp liefern den höherdimensionalen Fall.

Um (1) und (3) zu rechtfertigen verwendet man den Lebesgueschen Konvergenzsatz. Für $\beta = i$ bricht alles zusammen !

Um den Definitionsbereich der Fouriertransformation substantiell zu erweitern, schränken wir ihn zuerst massiv ein:

Def.: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $j \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Halbnormen ($\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$)

$$\varrho_j(f) := \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x\rangle^j |\nabla^\alpha f(x)|.$$

Der Vektorraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \varrho_j(f) < \infty \ \forall j \in \mathbb{N}_0 \}$$

heißt der Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen. Durch

$$d_{\mathcal{S}}(f,g) := \sum_{j=0}^\infty 2^{-j} \frac{\varrho_j(f-g)}{1+\varrho_j(f-g)}$$

wird eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Bem.: (1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ umfasst.

(2) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung. ($\|f\|_p \lesssim_{p,n} \varrho_{n+1}(f)$). Insbes. ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, Fouriertransformation und Faltung sind also für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert und haben die bisher genannten Eigenschaften. Darüber hinaus gelten: s. 9a

(3) Mit $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, sofern $1 \leq p < \infty$ ist.

(1) $\nabla^\alpha (f * g) = (\nabla^\alpha f) * g = f * (\nabla^\alpha g)$ $\left(\nabla^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} \right)$

(2) $\mathcal{F}(\nabla^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F} f(\xi)$, insbes. $\left((i\xi)^\alpha = i^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j} \right)$

$\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 \mathcal{F} f(\xi)$

(3) $\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = (i \nabla_\xi)^\alpha \mathcal{F} f(\xi)$.

(4) $(S(\mathbb{R}^n), d_S)$ ist vollständig.

Bsp.: (1) Die Gaussfunktionen

$$G_\beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto G_\beta(x) = e^{-\beta \frac{|x|^2}{2}}$$

gehören zu $S(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{Re}\beta > 0$ ist.

(2) Ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und sind $P, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Polynome, so sind auch $Pf \in S(\mathbb{R}^n)$ und $Q(\nabla) f \in S(\mathbb{R}^n)$. Die Hermite-Funktionen gehören zu $S(\mathbb{R}^n)$.

(3) $f, g \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \cdot g \in S(\mathbb{R}^n)$ und $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$.

(4) Nicht zu $S(\mathbb{R}^n)$ gehören z.B. $f(x) = e^{-|x|}$ und

$g(x) = \langle x \rangle^{-N}$.

Die Stetigkeit von Funktionen $F : (S(\mathbb{R}^n), d_S) \to (X, d)$ in irgendeinen metrischen Raum (X, d) ist durch die Angabe der Metriken festgelegt. Für lineare Abbildungen ist das folgende Kriterium allerdings besser zu handeln:

Krit.: (1) Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, wenn gilt

$\forall j \in \mathbb{N}_0 \; \exists N = N(j) \in \mathbb{N}_0$, so dass $\varrho_j(Af) \lesssim_j \sum_{i=0}^{N} \varrho_i(f) \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$

(2) Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to (E, \| \; \|)$ in einen normierten $\mathbb{C}$-VR E ist genau dann stetig, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\| Af \| \lesssim \sum_{i=0}^{N} \varrho_i(f) \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe von (1) sieht man z. B. ein, dass für ein Polynom $Q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die lineare Abbildung $Q(\nabla): S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ und die Multiplikation mit einem Polynom stetig sind. Ferner erhält man

Satz 1: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus, die (ebenfalls stetige) Inverse $\mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist durch die Fourierinversionsformel gegeben.

Teil (2) kann mit $E = \mathbb{C}$ insbesondere für lineare Funktionale $T: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ verwendet werden. Hier sind einige Beispiele:

(1) Reguläre Distributionen: Es sei $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

(1.1) messbar und von moderatem Wachstum, d.h. $|g(x)| \lesssim \langle x \rangle^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ oder

(1.2) $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$.

Dann ist $T_g : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto T_g[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx$ ein stetiges lineares Funktional.

(2) Maße: Sei $\mu: \mathcal{B}^n \to [0, \infty]$ ein Maß, so dass für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} d\mu(x) < \infty$. Dann wird durch $T_\mu[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu$ ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(3) Lineare Abbildungen, bei denen Ableitungen involviert sind, z. B. der Cauchy-Hauptwert von $\frac{1}{x}$, d.i.

$$P.V.\frac{1}{x}[f] := \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x}\,dx. \quad (\text{Hier ist } n=1.)$$

Für die Stetigkeit beachte man, dass für alle $\varepsilon>0$

$$\Big|\int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x}\,dx\Big| \leq \int_{\varepsilon<|x|<1} \Big|\frac{f(x)-f(0)}{x}\Big|\,dx + \int_{|x|>1} \frac{|f(x)|}{|x|}\,dx$$

$$\underset{MWS}{\leq} \|f'\|_\infty + \|x\cdot f\|_\infty \lesssim S_1(f).$$

<u>Def.</u>: Den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $S'(\mathbb{R}^n)$. Seine Elemente heißen <u>temperierte Distributionen</u>.

<u>Bem.</u>: Der Zusatz "temperiert" (= gemäßigt) dient zur Unterscheidung von der etwas größeren Klasse der Distributionen (ohne weiteren Zusatz), das sind stetige Linearformen auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist ein lineares Funktional $T: C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ genau dann stetig, wenn gilt:

$\forall$ Kompakta $K\subset\mathbb{R}^n$ existieren $C_K>0$, $N_K\in\mathbb{N}$, so dass $|T[f]| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq N_K} \|\nabla^\alpha f\|_\infty$ für alle $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit supp $f\subset K$.

<u>Bsp.</u>: $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{|k|}\delta_k$ ist eine Distribution, aber nicht temperiert, ebenso T_f für $f(x) = e^{|x|^2}$.

Def (Konvergenz und Stetigkeit in $S'(\mathbb{R}^n)$).

(1) Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $S'(\mathbb{R}^n)$ heißt konvergent gegen $T\in S'(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $f\in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} T_k[f] = T[f]$$

(sog. "schwach-*-Konvergenz").

(2) Eine lineare Abbildung $A: S'(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n)$ heißt stetig, wenn für jede Nullfolge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $S'(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass auch $\lim\limits_{k\to\infty} AT_k = 0$ in $S'(\mathbb{R}^n)$.

Diese Begriffe von Konvergenz und Stetigkeit sind so schwach, dass das folgende "Konstruktionsprinzip" für stetige lineare Abbildungen in $S'(\mathbb{R}^n)$ gilt:

Satz 2: Es sei $A_0: S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung[1] und $A: S'(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$AT[f] := T[A_0 f].$$

Dann ist A linear und stetig.

Beweis: Linearität: klar. Für die Stetigkeit sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $S'(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} T_k[f]=0\ \forall f\in S(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} AT_k[f] = \lim\limits_{k\to\infty} T_k[A_0 f]=0$ für alle $f\in S(\mathbb{R}^n)$ und das heißt $\lim\limits_{k\to\infty} AT_k = 0$ in $S'(\mathbb{R}^n)$.

---

1) nicht notwendig stetig, aber überall definiert!

Anwendungen:

(1) Die Distributionsableitung: Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann definiert man

$$\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \ T \mapsto \nabla^\gamma T$$

durch die Regel der partiellen Integration, d.h.

$$\nabla^\gamma T[f] = (-1)^{|\gamma|} T[\nabla^\gamma f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

(2) Multiplikation mit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ moderaten Wachstums:

$$a T[f] = T[\underbrace{af}_{\in S(\mathbb{R}^n)}] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

(3) Translation und lineare Bijektion: $b \in \mathbb{R}^n, A \in GL(n)$

Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$: $\tau_b f(x) := f(x-b)$; $Af(x) := f(Ax)$;

für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$: $\tau_b T[f] := T[\tau_{-b} f]$, $AT[f] := \frac{1}{|\det A|} T[A^{-1} f]$

Inverse und Korrekturfaktor sind eingefügt, um Konsistenz mit den regulären Distributionen zu erreichen. Ähnlich im Folgenden.

(4) Faltung von $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $g \in S(\mathbb{R}^n)$: Man setzt $Rg(x) = g(-x)$ und definiert

$$T * g \ [f] := T[Rg * f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

(5) Die Fouriertransformation temperierter Distributionen: $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \ T \mapsto \mathcal{F}T = \hat{T}$

wird definiert durch $\hat{T}[f] = T[\hat{f}]$. $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Inverse: $\check{T}[f] = T[\check{f}] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$, $\check{f}$ nach Fourierinversionsformel.

Durch diese Konstruktionen wird auch erreicht, dass sich die Eigenschaften der Operationen in $S(\mathbb{R}^n)$ auf diejenigen in $S'(\mathbb{R}^n)$ vererben, z.B. gilt für (1) und (2) die Produktregel. Für die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{R}^n)$ gelten die folgenden Aussagen:

- $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus (topologischer Vektorräume).

- $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \widehat{T}$ und $\widehat{\xi^\alpha T} = (i \nabla_x)^\alpha \widehat{T}$,

  hierbei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex

- Der "Faltungssatz" gilt in der folgenden Form: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist

  $$\widehat{f * T} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}\, \widehat{T} \quad \text{und} \quad \widehat{f \cdot T} = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{T}.$$