1.2 Banach- und Hilberträume

Wir betrachten eine Reihe von Vektorräumen $E, F, H, \dots$ über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Abkürzung: $\mathbb{K}$-VR.

<u>Def.</u>: Sei E ein $\mathbb{K}$-VR. Eine <u>Norm</u> ist eine Funktion $\| \ \| : E \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$ (Homogenität)

(N2) $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

(N3) $\quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (Definitheit)

Gelten für $\| \ \|$ nur die Eigenschaften (N1) und (N2), so spricht man von einer <u>Halb-</u> oder <u>Seminorm</u>.
Ein Paar $(E, \| \ \|)$ wird als normierter Vektorraum bezeichnet.

<u>Bem.</u>: Ist $\| \ \|$ eine Norm auf E, so wird durch

$$d : E \times E \to [0,\infty), \quad (x,y) \longmapsto d(x,y) := \|x-y\|$$

eine <u>Metrik</u> definiert. Dieser Begriff umfasst die Eigenschaften

(M1) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\qquad$ (M2) $\quad d(x,y) = d(y,x)$ Symmetrie

(M3) $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\qquad \forall x,y,z \in E$

Δs-Ungleichung

Es gibt eine Vielzahl von Metriken, die <u>nicht</u> von einer Norm herrühren, es ist nicht einmal eine Vektorraumstruktur erforderlich.

Def.: Eine Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum (X,d) heißt eine Cauchy-Folge, wenn $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ gilt.

Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

Def.: Ein Banachraum ist ein normierter $\mathbb{K}$-VR, der vollständig ist bezgl. der von der Norm induzierten Metrik. Bezeichnung: B-Raum.

Bsp.: (1) (Prä-)Hilberträume Sei H ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt ein Skalarprodukt, falls gilt

(S1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y, z \in H;$

(S2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in H$; (S3) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$

(Wenn nur (S1) und (S2) gelten, spricht man von einem Halb- oder Semiskalarprodukt.) Ein Paar $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-VR H und einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ heißt ein Prähilbertraum.

Ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein (Semi-) Skalarprodukt, so wird durch

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

eine (Halb-) Norm definiert. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung benötigt man die wichtige

Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$
$\forall x, y \in H$

Aufg.: Es sei $\langle\, ,\,\rangle$ ein Skalarprodukt und $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

(1) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz- und die ΔS-Ungleichung.

(2) Zeigen Sie:

(i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

(ii) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

(Polarisationsgleichung, der zweite Summand tritt nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auf.)

Nützliches Kriterium: Eine Norm stammt genau dann von einem Skalarprodukt, wenn sie der Parallelogrammgleichung genügt. (Werner, Funktionalanalysis, Satz V.1.7)

Def.: Ein <u>Hilbertraum</u> ist ein vollständiger Prähilbertraum. Bez.: H-Raum.

(2) Bei der funktionalanalytischen Untersuchung von Evolutionsgleichungen wie der Schrödinger-Gleichung faßt man diese <u>partiellen</u> Dgln. als <u>gewöhnliche</u> Dgln. für B-Raum-wertige Funktionen. Dadurch gewinnen die folgenden Funktionenräume Bedeutung:

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall und $(E, \|\ \|_E)$ ein B-Raum. Man setzt

$$C_b(I, E) := \{f: I \to E : f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

und versieht diesen $\mathbb{K}$-VR mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|_E .$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $(E, \| \ \|_E)$ wird auch $(C_b(I,E), \| \ \|_\infty)$ ein B-Raum. (Bew. als ÜA.)

Allgemeiner für k-mal stetig d'bare Funktionen:

$$C_b^k(I,E) := \{ f : I \to E : f^{(\ell)} \in C_b(I,E) \ \forall \ell \in \{0,\dots,k\} \}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{k,\infty} := \sum_{\ell=0}^{k} \|f^{(\ell)}\|_\infty . \qquad (*)$$

Dabei ist $g = f'$ genau dann, wenn für alle $t \in I$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) - g(t) \right\|_E = 0.$$

Auch die $C_b^k(I,E)$ mit $\| \ \|_{k,\infty}$ sind B-Räume. Im Fall $\mathbb{K} = E$ verallgemeinert man zu $C_b^k(A) := C_b^k(A, \mathbb{K})$ mit einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist die Summe bei $(*)$ durch die Summe über alle partiellen Ableitungen zu ersetzen.

(3) <u>L^p-Räume.</u> Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1,\infty)$. Dann ist

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \int |f|^p d\mu < \infty \}$$

ein $\mathbb{K}$-VR und $\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$. (N1) folgt aus der Linearität des Integrals. Die ΔS-Ungleichung (N2) ist schwieriger einzusehen und wird oft als Minkowski-Ungleichung bezeichnet. Zu ihrem Beweis benötigt man die <u>Höldersche Ungleichung</u>

$$\left|\int f g \, d\mu\right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. p und p' mit dieser Eigenschaft werden als konjugierte Hölder-Exponenten bezeichnet. Etwas allgemeiner hat man

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}.$$

(N3) ist hier verletzt, denn es gilt

$$\|f\|_p = 0 \iff \mu(N_f)=0 \text{ für } N_f=\{x\in X : f(x)\neq 0\}.$$

Um die Normeigenschaft (N3) zu erzwingen, faßt man solche Funktionen zu einer Äquivalenzklasse zusammen, die sich nur auf einer μ-Nullmenge unterscheiden. Algebraisch formuliert: Man setzt

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) : f = 0 \ \mu\text{-f.ü.}\},$$

bildet den Quotientenvektorraum

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N} = \{f+\mathcal{N} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und versieht diesen mit der Halbnorm $\|\ \|_p$, die durch dieses Manöver zu einer Norm wird.

Ähnlich verfährt man für $p=\infty$. Man setzt

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \exists C>0 : \mu(\{x\in X : |f(x)|>C\})=0\}.$$

Das ist der $\mathbb{K}$-VR der wesentlich beschränkten Funktionen auf $(X,\mathcal{A},\mu)$. Auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ist

$$\|f\|_\infty := \inf\{C>0 : \mu(\{x\in X : |f(x)|>C\})=0\}$$

eine Halbnorm, die auf $L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/N$ zu einer Norm wird.

Die L^p-Räume sind vollständig. Das ist der <u>Satz von Fischer-Riesz</u>, der nicht trivial ist. Sein Beweis liefert darüber hinaus die folgende, oft nützliche Erkenntnis: Ist $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mu)$ $(1\le p\le\infty)$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$, die punktweise μ-f.ü. konvergiert. (Die Folge selbst konvergiert zwar in $\|\ \|_p$, aber für $p<\infty$ nicht in jedem Fall punktweise.)

$\|\ \|_p$ stammt von einem Skalarprodukt genau dann, wenn $p=2$ ist (man verwende das "nützliche Kriterium" aus Bsp. 2!). In diesem Fall ist $\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ für

$$\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}\,d\mu,$$

bei $L^2(\mu)$ handelt es sich also um einen Hilbertraum.

(4) Der Raum $L(E,F)$.

$(E,\|\ \|_E)$ und $(F,\|\ \|_F)$ seien normierte $\mathbb{K}$-VRe.

Def.: Eine lineare Abbildung $A: E\to F$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn es eine Konstante $C>0$ gibt, so dass

$$\|Ax\|_F \le C\|x\|_E \quad \forall x\in E.$$

Offenbar ist jede beschränkte lineare Abbildung Lipschitz- und damit gleichmäßig stetig, insbesondere stetig in $x_0=0$. Die Umkehrung gilt ebenfalls:

Aufg.: Sei $A: E \to F$ linear und stetig in $x_0=0$. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist.

Def.: Auf dem $\mathbb{K}$-VR

$$L(E,F) := \{A: E \to F : A \text{ ist linear und beschränkt}\}$$

definiert man die "Operatornorm"

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Bem.: (1) Manchmal $\|A\|_{E\to F}$ statt $\|A\|$.

(2) Die Operatornorm ist eine Norm. Es gilt

$$\|A\| = \inf\{C>0 : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \; \forall x \in E\}.$$

$(L(E,F), \| \; \|_{E\to F})$ ist ein B-Raum, wenn F vollständig ist.

(3) Wichtige Spezialfälle sind $L(E) := L(E,E)$ und $E' := L(E,\mathbb{K})$, der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf E. E' wird als der (topologische) Dualraum von E bezeichnet (im Ggs. zum "algebraischen" Dualraum E^*, der alle linearen Funktionale auf E umfasst). Nach (2) ist E' stets vollständig.

Nicht alle für uns relevanten Funktionenräume lassen sich mit einer Norm versehen, so dass sie vollständig werden. Schwierigkeiten machen z.B.

$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig diffbar}\},$$

wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, und erst recht

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega).$$

In manchen Fällen verfügt man über ein abzählbares Halbnormensystem $(\| \ \|_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, aus dem man mit

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k}$$

eine Metrik bauen kann. In anderen Fällen muss man sich begnügen mit einer Topologie (oder einem Konvergenzbegriff) begnügen, um die Stetigkeit einer linearen Abbildung erklären zu können. Die allgemeinste derartige Struktur ist die eines topologischen Vektorraums:

<u>Def.</u>: Ein Paar (E, τ) bestehend aus einem $\mathbb{K}$-VR E und einer Topologie τ heißt ein <u>topologischer Vektorraum</u>, wenn die Addition $+ : E \times E \to E$ und die skalare Multiplikation $\cdot : E \times \mathbb{K} \to E$ stetig sind.

<u>Bem.</u>: Wenn in dieser Def. die Topologie τ von einer Metrik stammt und die Addition $+ : E \times E \to E$ sogar <u>gleichmäßig</u> stetig ist, spricht man von einem <u>metrischen Vektorraum</u>.

Strukturelemente des Hilbertraumes

Das Skalarprodukt in einem Prähilbertraum gibt uns die Möglichkeit, Winkel zwischen und insbesondere Orthogonalität von Vektoren zu erklären.

Def.: Es seien H ein Prähilbertraum, $x, y \in H$ und $M, N \subset H$ Teilmengen. Dann heißen

(1) x und y senkrecht zueinander, kurz: $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist;

(2) M und N senkrecht zueinander, in Zeichen: $A \perp B$, wenn $x \perp y$ ist für alle $x \in M$ und $y \in N$;

(3) $M^{\perp} := \{ y \in H : x \perp y \;\; \forall x \in M \}$ das <u>orthogonale</u> Komplement von M.

Bem.: (1) $x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagoras)

(2) Für jedes feste $x \in H$ ist die Abbildung

$$L_x : H \to \mathbb{K}, \; y \mapsto L_x[y] := \langle y, x \rangle$$

ein <u>stetiges</u> lineares Funktional aufgrund der Ungleichung $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ von Cauchy-Schwarz. Daher

ist $$\{x\}^{\perp} = L_x^{-1}(\{0\}) =: N(L_x)$$

ein <u>abgeschlossener</u> linearer Teilraum von H. (Allgemein ist der <u>Kern</u> $N(A) = \{ x \in E : Ax = 0 \}$ einer stetigen linearen Abbildung $A : E \to F$ stets ein abgeschlossener linearer Teilraum von E.)

(3) Für jede Teilmenge $M \subset H$ ist $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} \{x\}^{\perp}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von H.

(4) Ist G ein linearer Teilraum eines Prähilbertraumes H, so gilt $\overline{G}^\perp = G^\perp$.

Begründung: Aus $G \subset \overline{G}$ folgt $\overline{G}^\perp \subset G^\perp$. Andererseits: Ist $y \in G^\perp$, d.h. $\langle x, y\rangle = 0 \ \forall x \in G$, so ist wegen der Stetigkeit von $x \mapsto \langle x, y\rangle$ auch $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in \overline{G}$. Das bedeutet $y \in \overline{G}^\perp$, also $G^\perp \subset \overline{G}^\perp$.

<u>Def.</u>: (1) Eine lineare Abbildung $P: V \to V$ in einem $\mathbb{K}$-VR V heißt eine <u>Projektion</u>, wenn $P^2 = P$ gilt.

(2) Eine Projektion in einem Prähilbertraum H heißt <u>orthogonal</u>, wenn ihr Kern $N(P) = \{x \in H : Px = 0\}$ und ihr Bild $R(P) = \{Px : x \in H\}$ senkrecht zueinander sind.

Bem.: Für jede orthogonale Projektion $P \neq 0$ in einem Prähilbertraum H ist $\|P\| = 1$, denn für jedes $x \in H$ ist

$$\|x\|^2 = \|Px + (I-P)x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$$

Pythagoras

Die Vollständigkeitseigenschaft des Hilbertraumes wird erforderlich für den folgenden

<u>Satz von der orthogonalen Projektion</u>: Zu jedem abgeschlossenen linearen Teilraum G eines Hilbertraumes H existiert eine orthogonale Projektion $P: H \to H$, sodass

$$R(P) = G \quad \text{und} \quad N(P) = R(I-P) = G^\perp.$$

Für alle $x \in H$ ist

$$\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, G) \ (= \inf\{\|x-y\| : y \in G\}).$$

<u>Bem.</u>: Der Satz wird oft kürzer formuliert: Für jeden abgeschlossenen linearen Teilraum G eines Hilbertraumes H ist

$$H = G \oplus G^{\perp}.$$

($\oplus$ bedeutet üblicherweise "direkte orthogonale Summe".)

Folgerung: Für jeden linearen Teilraum G eines Hilbertraumes H gelten

(1) $\overline{G} = G^{\perp\perp}$ und

(2) G ist dicht in H genau dann, wenn $G^{\perp} = \{0\}$.

Begründung: (1) Nach dem Satz von der orthogonalen Projektion haben wir

$$H = \overline{G} \oplus \overline{G}^{\perp} = G^{\perp} \oplus G^{\perp\perp}.$$

Da $G^{\perp} = \overline{G}^{\perp}$ nach Bem. (4) zur Def. von $\perp$, folgt (1).
(2) folgt aus (1), da $G^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow G^{\perp\perp} = H$.

In folgender Weise ist jeder Hilbertraum sein eigener Dualraum:

<u>Rieszscher Darstellungssatz:</u> Zu jedem stetigen linearen Funktional L auf einem Hilbertraum H gibt es genau ein $y \in H$, so dass

$$L[x] = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H.$$

Hierfür gilt $\|L\| = \|y\|$.

Begründung der Existenzaussage: Falls $L = 0$ ist, wählt man $y = 0$. Andernfalls gibt es nach dem Satz von der orthogonalen Projektion ein $y_0 \in N(L)^\perp$ mit $\|y_0\| = 1$. Für

$$\xi(x) = L[x]\, y_0 - L[y_0]\, x$$

ist dann $L[\xi(x)] = 0$ und daher auch

$$0 = \langle \xi(x), y_0 \rangle = L[x] - L[y_0] \langle x, y_0 \rangle,$$

also $L[x] = \langle x, y \rangle$ für $y = \overline{L[y_0]} \cdot y_0$. ◪

Ein weiteres wesentliches Strukturelement des Hilbertraums sind Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen:

Def.: Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Vektoren in einem (Prä-) H-Raum heißt ein <u>Orthonormalsystem</u> (ONS), falls für alle $i, j \in I$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Hierbei ist I eine beliebige Indexmenge.

Da die Abb. $P : H \to H$, $x \longmapsto Px := \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ eine orthogonale Projektion ist, gilt für jedes ONS die

<u>Besselsche Ungleichung</u>: $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$

Gilt dies für alle $x \in H$ mit "=", spricht man von einer Orthonormalbasis. Genauer:

<u>Def.</u>: Ein ONS $(e_k)_{k\in I}$ in einem Prä-H-Raum H heißt <u>vollständig</u> oder eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB), wenn die folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

(1) $H = \overline{\langle e_k : k\in I\rangle}$, d.h. die lineare Hülle des Systems $(e_k)_{k\in I}$ ist dicht in H.

(2) Für jedes $x\in H$ gilt $x = \sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle e_k$ mit Konvergenz in H.

(3) Für jedes $x\in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in I} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

<u>Wenn H</u> zudem <u>vollständig</u>, also ein H-Raum ist, ist auch die Aussage

(4) $\langle e_k : k\in I\rangle^{\perp} = 0$, d.h. $x \perp e_k \ \forall k\in I \Rightarrow x = 0$

äquivalent zu (1)-(3).

(Bew. der Äquivalenzen: ÜA oder Lit., z.B. Werner: FA)

Keineswegs trivial ist die Tatsache, dass jeder Hilbertraum $H \neq \{0\}$ eine ONB besitzt. In den meisten relevanten Fällen lassen sich ONBen jedoch relativ leicht konstruieren:

<u>Def.</u>: Ein topologischer Raum heißt <u>separabel</u>, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

In einem separablen H-Raum ist jede ONB abzählbar. Solche erhält man mit dem <u>Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt</u>: Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge eines H-Raumes H. Man setzt: $e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $\tilde{e}_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k$, $e_n := \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}$.

(Falls sich $\tilde{e}_n = 0$ ergibt, wird der entsprechende Beitrag gestrichen.) Dann ist das System $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H.

Bspe.: (1) Es ist ein Ergebnis der klassischen Theorie der Fourierreihen, dass sich jede Funktion $f \in L^2((-\pi,\pi))$ in der Norm $\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$ durch trigonometrische Polynome

$$P_N = \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k \quad \text{mit } e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad x \in (-\pi,\pi), k \in \mathbb{Z}$$

approximieren lässt. Das bedeutet, dass $\langle e_k, k \in \mathbb{Z}\rangle$ in $L^2((-\pi,\pi))$ dicht ist, m.a.W.: $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine ONB von $L^2((-\pi,\pi))$.

(2) Es seien $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ λ^n-messbar, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ λ^m-messbar, $\mu = \lambda^n|_{A_1}$, $\nu = \lambda^m|_{A_2}$ und $(e_k)_{k\in I}$ sowie $(f_\ell)_{\ell\in J}$ ONBen von $L^2(\mu)$ bzw. $L^2(\nu)$. Dann ist durch

$$g_{k,\ell}(x,y) := e_k(x) f_\ell(y) \qquad ((x,y) \in A_1 \times A_2)$$

eine ONB von $L^2(\mu\times\nu)$ gegeben. Das erhält man mit ein wenig Maßtheorie aus der charakterisierenden Eigenschaft (4) einer ONB in einem Hilbertraum. Wiederholte Anwendung ergibt, dass

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \quad \text{mit} \quad e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ik\cdot x} \qquad \left(k\cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i k_i\right)$$

eine ONB von $L^2((-\pi,\pi)^n)$ ist.

(3) Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $f_k(x) = x^k e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$. Durch Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt erhält man hieraus eine ONB $(H_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $L^2(\mathbb{R})$. Die H_k sind gerade die Hermite-Funktionen, die bei der Beschreibung des harmonischen Oszillators eine wesentliche Rolle spielen. Mit

$$H_{\vec{k}}(x) := \prod_{j=1}^{n} H_{k_j}(x_j) \qquad (k\in\mathbb{N}_0^n,\ x\in\mathbb{R}^n)$$

erhält man nach (2) eine ONB von $L^2(\mathbb{R}^n)$. (Mehr zu den Hermite-Funktionen ggf. in Form einer $\overset{n}{\text{ÜA}}$.)