1. Mathematische Grundlagen

1.1 Abstrakte Integration

Sei X eine Menge mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.

<u>Def.</u>: Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine <u>σ-Algebra</u>, wenn

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, (2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

disjunkte Vereinigung

(3) $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \neq n \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Beispiele und Konstruktionen:

(1) $\mathcal{P}(X)$ ist stets eine σ-Algebra.

(2) Restriktion: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $A_0 \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A} \cap A_0 := \{A \cap A_0 : A \in \mathcal{A}\}$ ebenfalls eine σ-Algebra.

(3) Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\mathcal{M} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A}$$

<u>die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra</u>. Das ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ umfasst. (Wohldef. nach (1))

(3.1) X abzählbar, $\mathcal{M} = \{\{x\} : x \in X\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{P}(X)$.

(3.2) $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine <u>Topologie</u> (= System offener Teilmengen) auf X, wenn

(1) $\emptyset, X \in \tau$ (2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(3) $U_i \in \tau$, $i \in I$ $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

beliebige Indexmenge

Bsp.: Die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (allgemeiner: eines metrischen Raumes) bilden eine Topologie. Dabei heißt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn gilt: Für alle $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n : |x - x'| < \varepsilon\} \subset \Omega$. (Für metrische Räume (X, d) ist nur $\mathbb{R}^n$ durch X und $|x - x'|$ durch $d(x, x')$ zu ersetzen.)

Def.: Für einen topologischen Raum (X, τ) heißt

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$$

die Borel-σ-Algebra auf X, ihre Elemente werden als Borel-Mengen bezeichnet. Insbesondere ist $\mathcal{B}^n$ die Borel-σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$. (Im Fall $n = 1$: $\mathcal{B}$)

(3.3) X und Y seien Mengen, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-Algebren. Dann heißen

$$\mathcal{A} \square \mathcal{C} := \{A \times C : A \in \mathcal{A} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$$

das System der Rechteckmengen aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ und

$\mathcal{A} \times \mathcal{C} := \sigma(\mathcal{A} \square \mathcal{C})$ die Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$.

Bem.: Nicht trivial: $\mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^{n+m}$.

Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein messbarer Raum. Das ist die minimale Struktur, um ein Maß von Mengen festzulegen.

<u>Def.</u>: $(X,\mathcal{A})$ sei ein messbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$$ heißt ein <u>Maß</u>, wenn gilt

(1) $\mu(\emptyset)=0$, (2) $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$

σ-Additivität $\Rightarrow \mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Ein Tripel $(X,\mathcal{A},\mu)$, bestehend aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Maß μ, heißt ein <u>Maßraum</u>.

Ein Maß μ bzw. ein Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ heißen

- <u>endlich</u>, wenn $\mu(X)<\infty$;
- <u>σ-endlich</u>, wenn eine Mengenfolge (A_n) in $\mathcal{A}$ existiert, so dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mu(A_n)<\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$N \in \mathcal{A}$ heißt eine μ-<u>Nullmenge</u>, wenn $\mu(N)=0$ ist.

<u>Bez.</u>: Sei $A(x)$ eine Aussage in Abhängigkeit von $x\in\mathcal{A}$.
Wir sagen "A gilt μ-fast überall" oder "A gilt für μ-fast alle x", wenn $\mu(\{x\in X : \neg A(x)\})=0$.

Beispiele und Konstruktionen:

(1) X beliebig, $x_0\in X$. Dann heißt (endliches Maß!)

$$\delta_{x_0} : \underset{\text{bel. σ-Algebra}}{\mathcal{A}} \to [0,\infty],\ A \mapsto \delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 : x\in A \\ 0 : x\notin A \end{cases}$$

das in x_0 konzentrierte <u>Dirac-Maß</u>.

(2) X sei abzählbar, z.B. $X\in\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}\}$, und $\mathcal{A}=\mathcal{P}(X)$. Dann wird durch

$$\mu(A) := \#A \quad (A\subset X)$$

Anzahl der Elemente

das sog. <u>Zählmaß</u> auf X definiert. Ist $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $(a_n)_n$ eine Folge mit Werten in $[0,\infty)$, so erhält man durch

$$\mu(A) := \sum_{x_n \in A} a_n$$

ein Maß auf $P(X)$. In diesem Fall heißt die Folge $(a_n)_n$ eine <u>Zähldichte</u> von μ. Solche Maße sind σ-endlich.

(3) Seien $\mu_{1,2}$ endliche Maße auf $(X, \mathcal{A})$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, def. durch

$$\mu(A) = a\mu_1(A) + ib\mu_2(A)$$

ein <u>komplexes Maß</u> auf $\mathcal{A}$. Vorteil: Komplexe Maße bilden einen Vektorraum.

(4) Restriktion: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A_0 \in \mathcal{A}$. Dann wird durch $\mu|_{A_0}(A \cap A_0) := \mu(A \cap A_0)$ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \cap A_0$ definiert.

(5) Produktmaße: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ seien σ-endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß

$$\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to [0, \infty], \qquad \text{so dass}$$

$$\mu \times \nu\,(A \times C) = \mu(A)\,\nu(C) \quad \forall\, A \times C \in \mathcal{A} \,\square\, \mathcal{C}.$$

Dieses ist ebenfalls σ-endlich und wird als das <u>Produktmaß</u> von μ und ν bezeichnet.

(6) Das <u>Lebesgue-Maß</u> auf dem $\mathbb{R}^n$: Für einen halboffenen und achsenparallelen Quader $Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$

setzt man

$$\lambda^n(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so existiert eine Zerlegung $\Omega = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ von Ω in disjunkte Quader dieses Typs. Man setzt

$$\lambda^n(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k),$$

wobei ∞ als Wert für $\lambda^n(\Omega)$ zugelassen ist. Dieses sog. Prämaß auf $(\mathbb{R}^n, \tau)$ kann in eindeutiger Weise zu einem σ-endlichen Maß $\lambda^n : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0, \infty]$ fortgesetzt werden. Das ist das wichtige <u>Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}^n$</u>.

(Es ist üblich, den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$ zu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ mit $\mathcal{B}^n \subsetneqq \mathcal{L}^n$ zu „vervollständigen", indem man Teilmengen von λ^n-Nullmengen aus $\mathcal{B}^n$ hinzunimmt. So entsteht die σ-Algebra $\mathcal{L}^n$ der Lebesgue-messbaren Mengen. Diese Vervollständigung hat aber praktisch sehr geringe Bedeutung.) Schließlich gelangt man durch Restriktion wie in (4) zum Lebesgue-Maß auf einer Borelschen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(7) Lebesgue-Stieltjes Maße auf $\mathcal{B}$ (beachte: $n = 1$!): Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und linksseitig stetig. Für ein halboffenes Intervall $[a,b) \subset \mathbb{R}$ setzt man

$$\mu_F([a,b)) := F(b) - F(a).$$

Diese nichtnegative Mengenfunktion auf $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ kann (ähnlich wie in (6)) in ein-

deutiger Weise zu einem σ-endlichen Maß $\mu_F : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ ⑥
fortgesetzt werden. Dieses wird als Lebesgue-Stieltjes-Maß mit Verteilungsfunktion F bezeichnet. Für $F(x) = x$ erhält man das eindimensionale Lebesgue-Maß. Im Ggs. zum Lebesgue-Maß sind L.-S.-Maße i. Allg. nicht translationsinvariant. Ferner ist

$$\mu_F(\{x_0\}) = \lim_{x \searrow x_0} \mu_F([x_0,x)) = \lim_{x \searrow x_0} F(x) - F(x_0) > 0$$

möglich, wenn F in $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Sprungstelle besitzt. Lebesgue-Stieltjes-Maße spielen eine Rolle in der Stochastik und – für uns von Interesse – bei der Spektraldarstellung unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren (→ später mehr dazu).

Konstruktion des Integrals nach einem Maß:

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann heißt

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A und

$$\int \chi_A \, d\mu := \mu(A) \in [0,\infty]$$

das μ-Integral von χ_A. Sind $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, so heißt

$$f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{A_k}$$

eine $\mathcal{A}$-elementare oder auch Treppenfunktion. Hierfür setzt man

$$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mu(A_k),$$

so dass dieses "Integral für Treppenfunktionen" ein lineares Funktional wird.

Eine nichtnegative Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ nennen wir $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine Folge $(f_n)_n$ $\mathcal{A}$-elementarer Fktn. existiert, so dass $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in X$ mit monoton steigender Konvergenz gilt, kurz $f_n \nearrow f$. Für solche Funktionen f definieren wir

$$\int f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

das ist das sog. (μ-) Integral für nichtnegative messbare Funktionen, bei denen der Wert ∞ zugelassen ist. Durch diesen Konstruktionsschritt erreicht man u.a., dass das μ-Integral ein <u>monotones</u> Funktional wird.

Nun sei $f: X \to \mathbb{R}$. Wir zerlegen $f = f_+ - f_-$, wobei $f_+(x) := \max(f(x), 0)$. Dann heißt f

(i) $\mathcal{A}$-messbar, wenn f_+ und f_- $\mathcal{A}$-messbar sind,

(ii) μ-integrierbar, wenn f $\mathcal{A}$-messbar ist und $\int f_+\,d\mu < \infty$ <u>und</u> $\int f_-\,d\mu < \infty$ sind.

In diesem Fall setzt man $\int f\,d\mu = \int f_+\,d\mu - \int f_-\,d\mu$. Schließlich heißt $f: X \to \mathbb{C}$ μ-integrierbar, wenn dies für $\mathrm{Re}\,f$ und $\mathrm{Im}\,f$ gilt und definiert

$$\int f\,d\mu = \int \mathrm{Re}\,f\,d\mu + i \int \mathrm{Im}\,f\,d\mu.$$

Bem. und Bsp.: (1) Wir haben hier die Integrale, wie in der Maßtheorie üblich, kurz in der Form $\int f d\mu$ anstelle von $\int f(x)\, d\mu(x)$ angegeben. Letzteres ist auch in Ordnung, manchmal sogar notwendig, z.B. wenn nach einem Produktmaß integriert wird und mehrere Variablen $x, y, \dots$ beteiligt sind.

(2) Statt $\int f d\lambda^n$ schreibt man oft $\int f(x) d^n x$ oder nur $\int f(x) dx$, ggf. mit Subscript, um den Integrationsbereich anzuzeigen.

(3) Ist $(X, \mathcal{A}, \delta_{x_0})$ ein Maßraum mit einem in $x_0 \in X$ konzentrierten Dirac-Maß, so gilt

$$\int f \, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Bew. als Übungsaufgabe. Vollziehen Sie dazu die Konstruktion des Integrals nach einem Maß nach.

(4) Um konkrete Lebesgue-Integrale auszurechnen, greift man meist auf das (uneigentliche) Riemann-Integral zurück. In diesem Zusammenhang gelten:

(i) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f auch auf $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar und

$$\text{Riemann-}\int_a^b f(x)\,dx = \text{Lebesgue-}\int_{[a,b]} f \, d\lambda^1.$$

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein ggf. unbeschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so dass auch $|f|: I \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann integrierbar ist. Dann ist f auch auf I Lebesgue-integrierbar, und die Integrale stimmen überein. (Diese Aussage wird falsch ohne den Zusatz über $|f|$. Bsp.: $f: (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$.)

Gegenüber dem Riemann-Integral hat das Lebesgue-Integral (mindestens) drei substantielle Vorteile:

(1) Konvergenzsätze (die die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung rechtfertigen): Durch die Definition des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen wird praktisch erzwungen der

<u>Satz über monotone Konvergenz von B. Levi</u>: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n: X \to \mathbb{R}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen, so dass

(i) $f_n \nearrow f$ punktweise μ-fast überall und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$.

Dann ist auch f μ-integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Noch häufiger als den Satz von B. Levi benötigt man den

Satz von der majorisierten Konvergenz (= Lebesguescher Konvergenzsatz): Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f_n \to f : X \to \mathbb{C}$ μ-fast überall;

(ii) es existiert eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ μ-f.ü..

Dann sind f, f_n μ-integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu .$$

Eine der vielen Anwendungen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes ist die Rechtfertigung der "Differentiation unter dem Integralzeichen" solcher Funktionen, die durch parameterabhängige Integrale definiert sind,

also $$F(x) = \int k(x,t) \, d\mu(t).$$

Hierfür möchte man

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \overset{(h_n) \text{ Nullfolge}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} (F(x+h_n) - F(x))$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int \frac{1}{h_n} (k(x+h_n, t) - k(x,t)) \, d\mu(t)$$

$$\overset{(!)}{=} \int \lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} (k(x+h_n, t) - k(x,t)) \, d\mu(t) = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x,t) \, d\mu(t)$$

und zum Beweis von (!) benutzt man den Satz von Lebesgue, meist im Zusammenhang mit dem Mittelwertsatz, um eine integrierbare Majorante g zu finden.

Aufg.: Sei $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ die Γ-Funktion. Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist und berechnen Sie $\Gamma'(x)$.

(2) Eine zufriedenstellende Theorie der mehrdimensionalen Integration, insbes. der Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{E}, \nu)$ seien σ-endliche Maßräume.

Dann gelten:

Satz von Tonelli: Ist $f : X \times Y \to [0,\infty)$ $\mathcal{A} \times \mathcal{E}$-messbar, so sind die Funktionen

$x \mapsto \int f(x,y)\, d\nu(y)$ und $y \mapsto \int f(x,y)\, d\mu(x)$

$\mathcal{A}$- bzw. $\mathcal{E}$-messbar und es gilt

$$\int f \, d\mu\times\nu = \int \Big(\int f(x,y)\, d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int \Big(\int f(x,y)\, d\mu(x) \Big) d\nu(y) \quad (*)$$

(Integral für nichtnegative messbare Funktionen, ∞ ist hier als Wert der Integrale zugelassen.)

Zum Zweiten hat man die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge auch unter der Voraussetzung, dass f nach dem Produktmaß $\mu\times\nu$ integrierbar ist. (In diesem Fall sind die auftretenden "Doppelintegrale" endlich, d.h. $\in \mathbb{C}$.)

<u>Satz von Fubini:</u> Ist $f: X\times Y \to \mathbb{C}$ $\mu\times\nu$-integrierbar, so sind

- $f(x,\cdot): y \mapsto f(x,y)$ für μ-f.a. $x\in X$ ν-integrierbar und
- $f(\cdot,y): x \mapsto f(x,y)$ für ν-f.a. $y\in Y$ μ-integrierbar

und es gilt (*).

Ein schönes Bsp. für das Zusammenwirken der Sätze von Tonelli ist die Wohldefiniertheit der <u>Faltung</u> zweier Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
Um dies einzusehen, setzen wir

$$F: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C},\quad (x,y) \mapsto F(x,y) := f(x-y)\,g(y).$$

Dann ist F monoton approximierbar durch Treppenfunktionen, also λ^{2n}-meßbar, und $|F|$ ist nicht-negativ und λ^{2n}-meßbar. Nach Tonelli gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |F(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx\Big)|g(y)|\,dy$$

$$\underset{\text{TI des } \lambda^n}{=} \Big(\int |f(x)|\,dx\Big)\Big(\int |g(y)|\,dy\Big) < \infty$$

und somit ist F nach λ^{2n} integrierbar. Jetzt ergibt der Satz von Fubini, dass für λ^n-fast alle $x\in\mathbb{R}^n$ das Integral

$$f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

existiert und eine integrierbare Funktion $f*g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert. Diese wird als <u>Faltung</u> von f und g bezeichnet. Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und verhält sich distributiv mit der punktweisen Addition von Funktionen. Um die Assoziativität zu verifizieren, benötigt man ebenfalls den Satz von Fubini. (Dies sei als Übungsaufgabe empfohlen.)

Schließlich ist der 3. Vorteil des Lebesgue-Integrals die Vollständigkeit der L^p-Räume, mit denen wir uns im nächsten Abschnitt u.a. beschäftigen.