

2.2 Einführung in die Quantenmechanik

Nach unserer kurzen Einführung in die klassische Mechanik in der letzten Vorlesung wollen wir nun zur Quantenmechanik übergehen. Dabei wollen wir zunächst an der Schwarzkörperstrahlung veranschaulichen, dass die klassische Physik bestimmte Grenzen hat, die mithilfe der Quantelung physikalischer Größen behoben werden können. Danach wollen wir die Schrödinger-Gleichung, den zentralen Untersuchungs-Gegenstand dieser Vorlesung, motivieren.

Eine ausführlichere Einführung in die (historischen) Aspekte/Motivationen der Quantenmechanik findet sich im Buch “Grundkurs Theoretische Physik 5/1” von Wolfgang Nolting, aus welchem die folgenden Herleitungen entnommen sind.

2.2.1 Schwarzkörperstrahlung

Wir wissen u.a. von Glühbirnen, dass Festkörper bei hohen Temperaturen glühen. Bei niedrigeren Temperaturen wird ebenfalls Energie abgestrahlt, wenn auch in der Form nicht-sichtbarer Wärmestrahlung. In beiden Fällen handelt es sich um elektromagnetische Strahlung. In der Physik betrachtet man häufig als idealisiertes Objekt den sog. *Schwarzen Körper*. Dieser Körper absorbiert alle einfallende Strahlung und lässt sich durch einen Hohlraum mit einem kleinen Loch realisieren. Die wenige, aus diesem Loch wieder austretende Strahlung nennen wir *Schwarze Strahlung* und ist identisch mit der Wärmestrahlung, welches im Innern des Hohlraums auf die Wände fällt. Die Wände emittieren und absorbieren Strahlung im Gleichgewicht. Dadurch wird sich ein elektrisches Feld mit konstanter Energiedichte w bilden, welche wir spektral zerlegen können, $w_\nu = dw/d\nu$.

Es lässt sich zeigen, dass die spektrale Energiedichte eine Funktion $w_\nu = f(\nu, T)$ von Frequenz und Temperatur ist. Weiter konnte gezeigt werden, dass sich diese Funktion in Form des *Wien’schen Gesetzes* vereinfachen lässt, sodass

$$f(\nu, T) = \nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (2.1)$$

wobei g eine Funktion sei, die nur noch von einer Variable ν/T abhängt. Mit einigen Annahmen gelangte man im Rahmen der klassischen Physik dazu, dass

$$g\left(\frac{\nu}{T}\right) = a \exp\left(-b\frac{\nu}{T}\right) \quad (2.2)$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gelten sollte, was nur im Bereich hoher Frequenzen gut funktioniert. Ein anderer Ansatz führt zu dem Zusammenhang

$$g\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{k_B T}{\nu}, \quad (2.3)$$

der *Rayleigh-Jeans-Formel*. Die räumliche, spektrale Energiedichte in dieser Herleitung lautet

$$w_\nu d\nu = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T d\nu. \quad (2.4)$$

Die Formel wiederum stimmt sehr gut mit experimentellen Beobachtungen überein, solange die Frequenzen klein sind. Wir sehen aber auch, dass wir mit dieser klassischen Beschreibung ein Problem haben, wenn wir die gesamte räumliche Energiedichte berechnen, da $w = \int_0^\infty w_\nu d\nu$ divergiert. Dies wird auch *Ultraviolett Katastrophe* genannt.

Wie können wir die oben genannten Probleme beheben? Es zeigte sich u.a. durch Planck, dass die Lösung bestimmter physikalischer Probleme in der Quantelung von Größen lag. Planck ersetzte die Strahlung emittierenden/absorbierenden Wandatome des betrachteten Hohlraums durch harmonische Oszillatoren. Jeder Oszillator besitzt Eigenfrequenz, mit der die elektrische Ladung um die Ruhelage schwingt. Durch die Schwingungen kann der Oszillator Energie mit dem Feld im Innern des Hohlraums austauschen.

Zusätzlich stellen wir nun die Hypothese auf, dass sich die Oszillatoren nur in solchen Zuständen befinden, für welche die Energie ganzzahlige Vielfache eines elementaren Energiequants sind, d.h.

$$E_n = n\epsilon_0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5)$$

Nehmen wir nun an, dass wir insgesamt N Oszillatoren haben, wobei $N(n)$ im Zustand mit Energie E_n seien. Dann ist die mittlere Energie pro Oszillator

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)n\epsilon_0}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)}. \quad (2.6)$$

Weiterhin sei $N(n) \propto \exp(-\beta n\epsilon_0)$ mit $\beta = 1/(k_B T)$ nach der Boltzmann-Statistik. Einsetzen liefert

$$\bar{\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta n\epsilon_0) \right] = -\frac{d}{d\beta} \ln \left[\frac{1}{1 - \exp(-\beta\epsilon_0)} \right] = \frac{\epsilon_0}{\exp(\beta\epsilon_0) - 1}. \quad (2.7)$$

Wir nehmen nun die Formel für w_ν und ersetzen darin $k_B T$ durch $\bar{\epsilon}$. Verlangen wir nun weiter, dass das Wien'sche Gesetz $f(\nu, T) = \nu^3 g(\nu/T)$ erfüllt ist, so folgt, dass $\epsilon_0 = h\nu$ für $h \in \mathbb{R}$ gelten muss.

Die resultierende *Planck'sche Strahlungsformel*

$$w_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 \frac{h}{\exp(\beta h\nu) - 1} \quad (2.8)$$

enthält die Wien-Formel und die Rayleigh-Jeans-Formel als Grenzfälle $h\nu \ll k_B T$ bzw. $h\nu \gg k_B T$. Mithilfe dieser Formel wird die Ultraviolett Katastrophe schließlich vermieden. Offensichtlich haben wir die Quantelung der Energie benötigt, um die Physik "zu reparieren". Die Bedeutung der Konstante h , welche die Einheit der Wirkung trägt, werden wir im Folgenden noch weiter sehen.

Neben diesem Beispiel gibt es noch viele weitere, in denen die klassische Physik an ihre Grenzen gestoßen ist. Wir wollen nun allerdings dazu übergehen, die Schrödinger-Gleichung zu motivieren.

2.2.2 Die Schrödinger-Gleichung

Um an die Schrödinger-Gleichung zu gelangen, wollen wir an dieser Stelle die sog. *Materiewellen* motivieren. Genauer gesagt wollen wir sehen, dass wir die gewöhnliche Teilchenbewegung mit einer zunächst abstrakteren, allgemeineren Wellenmechanik äquivalent beschreiben können. Dazu werden wir uns des *Hamilton-Jacobi-Formalismus* bedienen, welcher uns hilft, die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen signifikant zu vereinfachen.

Für diesen Formalismus nehmen wir eine besondere kanonische Transformation $(q_k, p_k) \rightarrow (q'_k, p'_k)$ vor, sodass für unsere neue Hamiltonfunktion $\mathcal{H}'(q', p', t) = 0$ gilt. Die transformierten Koordinaten und Impulse sind dann Erhaltungsgrößen, sodass alle dynamischen Größen in \mathcal{H}' zyklische Koordinaten sind:

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k} = \dot{q}'_k, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'_k} = \dot{p}'_k. \quad (2.9)$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann trivial, da q'_k, p'_k konstant sind. Die Schwierigkeit besteht darin, eine passende *Erzeugenden-/Wirkungsfunktion* S für unsere Transformation zu finden. Diese sei so gewählt, dass

$$\mathcal{H}'(q', p', t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

Weiterhin hänge $S(q, p', t)$ von den alten generalisierten Koordinaten und den neuen konjugierten Impulsen ab. Es gilt

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad q'_k = \frac{\partial S}{\partial p_k}. \quad (2.11)$$

Eingesetzt in $\mathcal{H}' = 0$ erhalten wir damit die *Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung* für S :

$$\mathcal{H}\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.12)$$

Mithilfe dieses Formalismus wollen wir nun mehrere physikalische Probleme betrachten.

Teilchen in Kraftfeld: Wir betrachten ein einzelnes Teilchen in einem konservativen Kraftfeld mit

$$\mathcal{H} = T + V = E = \text{const}. \quad (2.13)$$

Für unsere Erzeugendenfunktion splitten wir nun die Zeitabhängigkeit ab, sodass

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) = W(\mathbf{r}, \mathbf{p}') - Et. \quad (2.14)$$

Nach dem Hamilton-Jacobi-Formalismus ist $\mathbf{p}' = \text{const}$. Dies wiederum heißt, dass $W = \text{const}$ feste Flächen in dem Konfigurationsraum aufspannt. Mit der Zeit t schieben sich über diese W -Flächen Flächen mit $S = \text{const}$. Diese sind als Wellenfronten sog. *Wirkungswellen* aufzufassen. Diesen Wellen können wir eine Phasengeschwindigkeit \mathbf{u} (d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines bestimmten Punktes des Wellenfront) zuordnen.

Betrachten wir zwei Punkte $A = \mathbf{r}$ (zur Zeit t) und $B = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ (zur Zeit $t + dt$), so ist die Änderung der Wirkungsfunktion gegeben als

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial S}{\partial x_i} dx_i = -E dt + \nabla W \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Damit sich die Wirkung S entlang des Weges $A \rightarrow B$ nicht ändert und wir uns mit der Wirkungswelle mitbewegen, muss $dS = 0$ gelten, d.h.

$$\nabla W \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla W \cdot \mathbf{u} = E. \quad (2.16)$$

Als Phasengeschwindigkeit steht \mathbf{u} senkrecht zu den Wellenfronten. Ebenso steht $\mathbf{p} = \nabla W$ orthogonal zu den Flächen $W = \text{const}$. Dies bedeutet: die Trajektorie des Teilchens verläuft orthogonal zur S -Wellenfront. Die Geschwindigkeit der S -Welle und die des Teilchens sind somit anti-parallel und wir sehen, dass

$$|\mathbf{u}| = \frac{|E|}{|\nabla W|} = \frac{|E|}{mv}, \quad (2.17)$$

also $uv = \text{const}$. Verwenden wir nun erneut die Gleichung $\mathcal{H} = -\partial_t S$, so können wir nach Definition $\mathcal{H} = E = \nabla W \cdot \mathbf{u}$ einsetzen. Da wir die zeitliche Komponente für die Wirkungsfunktion abgesplittet haben, sehen wir leicht ein, dass $\nabla W = \nabla(S + Et) = \nabla S$. Quadrieren und umformen der Gleichung liefert schließlich die *Wellengleichung der klassischen Mechanik*

$$\boxed{(\nabla S)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2}. \quad (2.18)$$

Wir haben soeben gesehen, dass die gewöhnliche Teilchenbewegung und die Beschreibung über die Wirkungswelle äquivalent sind.

Lichtwellen: In Vorlesungen zur Optik sieht man mehrere Betrachtungsweisen zur Beschreibung optischer Phänomene, u.a. die geometrische Optik, welche Lichtstrahlen beschreibt (vgl. Snellius'sches Brechungsgesetz im Abschnitt zur Variationsrechnung) und die Lichtwellentheorie. Für einige Zusammenhänge ist es bereits ausreichend, sich der simpleren geometrischen Optik zu bedienen. Hierin ist die Vorstellung versteckt, dass wir das Konzept der Lichtstrahlen mit einer Bahn von Lichtteilchen gleichsetzen können.

Allgemeiner wissen wir aus der Elektrodynamik, dass wir Licht (in der Lichtwellentheorie) mittels der Wellengleichung der Optik,

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.19)$$

beschreiben können, wobei φ das elektromagnetische Skalarpotential ist, und n, c der Brechungsindex des Mediums bzw. die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit sind. Eine mögliche Lösung der dieser Gleichung sind Wellen der Form $\varphi = \varphi_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega/c(L(\mathbf{r}) - ct))$, wobei $L(\mathbf{r})$ den Lichtweg bezeichne. Setzen wir voraus, dass wir uns in der geometrischen Optik befinden, und n, φ_0 nur schwach vom Ort abhängen, so erhalten wir mit etwas Rechnen (dies zeigen wir hier nicht!) die sog. *Eikonal-Gleichung der geometrischen Optik*

$$(\nabla L(\mathbf{r}))^2 = n^2 =: \frac{c^2}{u^2}. \quad (2.20)$$

Lösungen dieser Gleichung spannen Flächen $L = \text{const}$ auf, welche den Wellenfronten entspricht. Die Lichtstrahlen verlaufen senkrecht zu ebendiesen Fronten, quasi wie ein "Lichtteilchen".

Der Schritt zur Schrödinger-Gleichung: Wir hatten mit der Wellengleichung der Optik gesehen, dass wir die geometrische Theorie der Lichtstrahlen aus der allgemeineren Wellentheorie erhalten können. Funktioniert dies ebenso für die Mechanik?

Wir ordnen die folgenden Ausdrücke aus der Theorie der Wirkungswellen und aus der Eikonalgleichung einander zu:

$$(\nabla W)^2 = \frac{E^2}{u^2} \leftrightarrow (\nabla L)^2 = n^2, \quad W \leftrightarrow L, \quad \frac{|E|}{u} = \sqrt{2m(E-V)} \leftrightarrow n = \frac{c}{u}. \quad (2.21)$$

Kann unser betrachtetes Teilchen als Welle interpretiert werden, so sollte es auch eine Wellenlänge λ und eine Frequenz ν haben. Die Wirkung $S = W - Et$ sollte der Phase $k_0(L - ct)$ entsprechen. Dann ist $E \propto ck_0$ und somit $E = h\nu$ für eine Proportionalitätskonstante $h \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $\lambda = u/\nu = h/p$. Der Proportionalitätskonstanten $h \approx 6.626 \times 10^{-34}$ Js werden wir später den Namen *Planck'sches Wirkungsquantum* geben.

Energie und Impuls des Teilchens legen Frequenz und Wellenlänge des Teilchenwelle fest.

Der Sprung von Klassischer zu Wellenmechanik gelingt nun ähnlich wie bei Übergang von geometrischer zur Wellenoptik. Mit der Wellengleichung und $\varphi \approx \exp(-i\omega t)$ erhalten wir eine zeitunabhängige Wellengleichung:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\omega^2}{u^2} \varphi = \nabla^2 \varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \varphi = 0. \quad (2.22)$$

So wie φ den "Zustand" einer Lichtwelle beschreibt, wollen wir in der Quantenmechanik eine Wellenfunktion ψ einführen, welche den Zustand eines Teilchens beschreibt. Nach unseren vorigen Überlegungen ist

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} 2m(E - V), \quad (2.23)$$

wobei wir $\hbar = h/2\pi$ eingeführt haben. Mit etwas Umformen erhalten wir schließlich die *zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.24)$$

Diese ist eine Eigenwertgleichung $\hat{H}\psi = E\psi$ für den Hamilton-Operator $\hat{H} = -\hbar^2/(2m)\Delta + V(\mathbf{r})$. Betrachten wir noch einmal die Wellengleichung und ihre Lösungen, so können wir die Zuordnung $E \leftrightarrow i\hbar\partial_t$ treffen und erhalten die *zeitabhängige Schrödinger-Gleichung*:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.25)$$

Operatoren in der Quantenmechanik (wie der Hamilton-Operator \hat{H}) tragen für gewöhnlich einen Hut. Wir werden diese Notation im Laufe der Vorlesung allerdings nicht immer konsequent weiterverfolgen.

2.2.3 Zur Wellenfunktion

Wir wollen nun ein paar mehr Details/Eigenschaften zur Wellenfunktion ψ erläutern. Ganz allgemein wird die Wellenfunktion für uns vom Ort \mathbf{r} und der Zeit t abhängen, wobei wir vermehrt auch eindimensionale Wellenfunktionen betrachten werden. Wie bereits in der Einleitung

zu dieser Vorlesung erwähnt, ist $\psi(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$ und nicht anschaulich interpretierbar. Stattdessen werden wir für gewöhnlich die *Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.26)$$

betrachten. Statt einer exakten Position von Teilchen wie in der klassischen Physik haben wir uns im Rahmen der Quantenmechanik nun mit Aufenthaltswahrscheinlichkeiten rumzuschlagen. Ableiten von ρ nach der Zeit liefert unter Nutzung der Schrödingergleichung

$$\partial_t(\psi^*\psi) = \frac{\hbar}{2mi}(\Delta\psi^*\psi - \psi^*\Delta\psi) . \quad (2.27)$$

Weiterhin wollen wir eine Wahrscheinlichkeits-Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*] \quad (2.28)$$

definieren. Insgesamt können wir eine *Kontinuitätsgleichung* schreiben, nämlich

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 .} \quad (2.29)$$

Solche Kontinuitätsgleichungen kennen wir z.B. auch aus der (Magneto-)Hydrodynamik. Eine zeitliche Änderung von ρ geht also mit einem Fluss eines Wahrscheinlichkeitsstroms durch die Oberfläche eines Volumens einher; es gilt also die Erhaltung der Teilchenzahl.

Wir wollen an dieser Stelle ebenfalls – wie in der Einführung besprochen – daran erinnern, dass wir üblicherweise die Wahrscheinlichkeit so normieren, dass

$$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1 \quad (2.30)$$

gilt. Weiterhin fordern wir, dass Wellenfunktionen im Unendlichen verschwinden, sodass wir implizit quadratintegrale Funktionen als Wellenfunktionen fordern.

2.2.4 Erste Schritte mit der Schrödinger-Gleichung

Wir wollen im Folgenden an einem sehr übersichtlichen Beispiel sehen, dass wir aus der Schrödinger-Gleichung diskrete Energieniveaus erhalten, wenn wir bestimmte Randbedingungen für unser System fordern.

Beispiel 2.2.1. Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\psi(x, t) \quad (2.31)$$

mit $\hbar, m \in \mathbb{R}$ für eine Wellenfunktion $\psi(x, t)$ in einer räumlichen und einer zeitlichen Dimension. Wir wählen einen Separationsansatz zur Lösung dieser PDE, d.h. $\psi(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Damit folgt unmittelbar

$$\psi_t = X(x)\dot{T}(t) , \quad \psi_{xx} = X''(x)T(t) , \quad (2.32)$$

wobei wir die Notation mit Punkt für eine zeitliche Ableitung nutzen, und die mit Strich für die räumliche(n).

Einsetzen liefert

$$i\hbar X(x)\dot{T}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}X''(x)T(t). \quad (2.33)$$

Wir separieren nach räumlichen und zeitlichen Beiträgen, und führen die Konstante $E > 0$ ein:

$$i\hbar \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} =: E. \quad (2.34)$$

Betrachten wir zunächst den zeitlichen Anteil,

$$i\hbar\dot{T}(t) - ET(t) = 0. \quad (2.35)$$

Mit einem Exponentialansatz $\exp(\lambda t)$ erhalten wir die Lösung

$$T(t) = Ce^{-iEt/\hbar}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Ganz ähnlich lösen wir den räumlichen Anteil

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X''(x) - EX(x) = 0 \quad (2.37)$$

mit einem Ansatz $\exp(\lambda x)$ und erhalten

$$X(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}Ex}\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}Ex}\right), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

Wir fordern nun, dass unsere Wellenfunktion am Rand der Box ‘‘eingespannt’’ ist, d.h. $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ für $L > 0$. Damit folgt

$$0 \stackrel{!}{=} \psi(0, t) = X(0)T(t) = (A \cdot 1 + B \cdot 0)T(t), \quad (2.39)$$

also $A = 0$ und aus der zweiten Randbedingung schließlich

$$0 \stackrel{!}{=} \psi(L, t) = X(L)T(t) = B \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}EL}\right)T(t). \quad (2.40)$$

Damit diese Randbedingung erfüllt ist, muss für $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$\frac{2m}{\hbar^2}EL \stackrel{!}{=} n\pi, \quad (2.41)$$

oder in finaler Form

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}. \quad (2.42)$$

Wir sehen also, dass wir diskrete Energieniveaus E_n erwarten.

2.2.5 Postulate der Quantenmechanik

Schließlich wollen wir noch die fundamentalen Postulate der Quantenmechanik formulieren. Hierbei geht es vor allem darum, die Beschreibung physikalischer Zustände etwas mehr zu formalisieren, wofür wir uns Elementen von Hilberträumen bedienen. Den jeweiligen Hilbertraum bezeichnen wir im Folgenden meist mit \mathcal{H} (nicht mit der Hamiltonfunktion aus der klassischen Mechanik verwechseln!).

1. Postulat: Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch einen Strahl in einem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt.

Die Vektoren unseres Hilbertraums schreiben wir als $|v\rangle \in \mathcal{H}$ (als “Ket” bezeichnet). Das Skalarprodukt zweier Vektoren schreiben wir als $\langle u|v\rangle$. Dabei bezeichnen wir $\langle u|$ als “Bra” für die “Bra-c-Ket-Notation”. Für den Physiker sind Bra und Ket in der Nutzung häufig beide das gleiche Objekt, nur mit komplexer Konjugation; der Mathematiker würde genauer sagen, dass $\langle u|$ aus dem Dualraum \mathcal{H}^* stammt (dazu später mehr).

Mit einem *Strahl* meinen wir eine Menge an Vektoren $\{\alpha|v\rangle|\alpha \in \mathbb{C}\}$. Die Elemente dieser Menge stellen für uns letztlich (bis auf einen Vorfaktor) alle denselben Zustand dar. Daher bezeichnen wir auch einfach $|v\rangle$ als *den* Zustandsvektor.

2. Postulat: Die Messung einer beobachtbaren physikalischen Größe unseres Systems, einer sog. *Observablen*, stellen wir über einen linearen, hermiteschen Operator A dar.

Der gemessene Wert λ stellt einen Eigenwert des Operators dar. Nach einer Messung befindet sich das System im Zustand $|v_\lambda\rangle$, welcher die Projektion von $|v\rangle$ auf den Eigenraum zu λ bezeichnet. Der Operator A sorgt für die Übersetzung zwischen einer messbaren physikalischen Eigenschaft (der *reellen* Observablen a) und den abstrakteren Zuständen der Quantenmechanik. Der sog. *Projektionsoperator* P_λ projiziert $|v\rangle$ auf den zu λ gehörenden Unterraum von \mathcal{H} (d.h. durch die Messung wird der Zustand verändert!).

3. Postulat: Die Wahrscheinlichkeit für die Messung eines Wertes λ ist

$$p(\lambda) = \langle v|P_\lambda|v\rangle . \quad (2.43)$$

4. Postulat: Ein Zustand entwickelt sich gemäß der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |v(t)\rangle = H |v(t)\rangle . \quad (2.44)$$

Dies führt uns an das Ende unserer Einführung in die physikalischen Aspekte der Vorlesung HMAP, welche lediglich einen generellen Überblick über klassische Mechanik und Quantenmechanik liefern soll. In den kommenden Physik-Vorlesungen werden wir immer wieder einzelne Begriffe/Sachverhalte aus der Physik einführen und mit höheren mathematischen Konzepten verbinden.