1.4 Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen

biografische Notiz: Laurent Schwartz, geb. 1915 in Paris, gest. 2002 ebda

- (teilweise) jüdischer Abstammung, Großneffe v. Jacques Hadamard, Schwiegersohn von Paul Levy
- Promotion 1943 (Universität Straßbourg, in der Illegalität)
- Begründer der Theorie der Distributionen (= verallgemeinerte Funktionen bzw. Verteilungen), Originalarbeit 1945, 2-bändiges Lehrbuch "Théorie des Distributions" 1950/51, aufbauend auf Vorarbeiten von Dirac u. Sobolev
- Fields-Medaille 1950
- Doktorvater u.a. von Lions, Malgrange, Grothendieck, Trèves
- politisches Engagement gegen den Algerienkrieg (vorübergehend der Verlust seiner Professur) und gegen den Vietnamkrieg (beteiligt am "Russell-Tribunal")

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man die Halbnormen $g_{\alpha,\beta}$ durch

$$g_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta f(x)|,$$

hierbei $x^\alpha = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$, $\nabla^\beta = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\beta_k}$. Man definiert,

$$S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : g_{\alpha,\beta}(f) < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \}$$

$S(\mathbb{R}^n)$ wird als <u>Schwartz-Raum</u> oder auch (etwas ungenau) als Raum der schnell fallenden Funktionen bezeichnet. Funktionen in $S(\mathbb{R}^n)$ werden als

Schwartz-Funktionen bezeichnet.

Bem. u. Bsp.:

(1) $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ umfaßt. Ferner ist $\langle H_k, k \in \mathbb{N}_0^n \rangle \subset S(\mathbb{R}^n)$, hierbei H_k die Hermite-Funktionen in mehreren Variablen.

(2) Für alle $p \in [1,\infty]$ ist $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$

Bew.: Für $p=\infty$ wählt man $\alpha=\beta=0$. Für $p<\infty$ stellt man zunächst fest, dass für $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(1+|x|^2)^n f(x) \lesssim S_{0,0}(f) + \sum_{k=1}^{n} S_{\alpha_k,0}(f) < \infty,$$

wenn wir $\alpha_k = (0,\dots,0,\underset{\uparrow\, k\text{-te Stelle}}{2n},0,\dots,0)$ wählen. Daher

$$\int |f|^p d\lambda = \int (1+|x|^2)^{-n}(1+|x|^2)^n |f(x)|^p dx$$

$$\leq \int (1+|x|^2)^{-n} dx \cdot \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{n/p} |f(x)|\Big)^p < \infty$$

(3) Für $1 \le p < \infty$ ist $S(\mathbb{R}^n)$ ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dies folgt aus (1) und (2) sowie der Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$.

(4) Es sei P ein Polynom in n Variablen und $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gehören auch Pf und $P(\nabla)f$ zu $S(\mathbb{R}^n)$.

(5) Sind $f,g \in S(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\nabla^\beta(f*g) = (\nabla^\beta f)*g = f*(\nabla^\beta g)$$

und es gilt $f*g \in S(\mathbb{R}^n)$.

(6) Nicht zu $S(\mathbb{R}^n)$ gehören: $e^{-|x|}$ (nicht diffbar im Nullpunkt) und $(1+|x|^2)^{-N}$ (für N fest, egal wie groß, diese Funktion fällt nicht schnell genug!)

Bisher haben wir $S(\mathbb{R}^n)$ nur als Vektorraum betrachtet. Wir sind jedoch an stetigen linearen Abbildungen auf $S(\mathbb{R}^n)$ interessiert, insbesondere an stetigen linearen Funktionalen. Dazu benötigen wir eine Metrik.

Es sei $(\alpha(i), \beta(i))_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0^{2n}$ und $\varrho_i := \varrho_{\alpha(i), \beta(i)}$ mit den oben definierten Halbnormen $\varrho_{\alpha,\beta}$. Dann setzen wir für $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$d(f,g) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho_i(f-g)}{1+\varrho_i(f-g)}$$

Dies definiert eine Metrik auf $S(\mathbb{R}^n)$, bezüglich der $S(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist (man spricht von einem Fréchet-Raum, d.h. das man Umgebungen stets konvex wählen kann, was bei einer solchen Metrik stets der Fall ist.)

<u>Lemma</u> 1 (i) Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $S(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen $f \in S(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = 0.$$

(ii) Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, falls gilt: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existieren endlich viele Multiindices $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_N, \beta_N)$, so daß

$$\varrho_{\alpha,\beta}(Af) \lesssim \sum_{i=1}^{N} \varrho_{\alpha_i, \beta_i}(f).$$

Bew.: zu (i). Sei $f_k \to f$ in $S(\mathbb{R}^n)$, d.h. per def.

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{S_i(f_k - f)}{1 + S_i(f_k - f)} = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}_0 : \lim_{k\to\infty} 2^{-i} \frac{S_i(f_k - f)}{1 + S_i(f_k - f)} = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}_0 : \lim_{k\to\infty} S_i(f_k - f) = 0.$$

Umgekehrt gelte $\lim_{k\to\infty} S_i(f_k - f) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

auch $\lim_{k\to\infty} 2^{-i} \dfrac{S_i(f_k - f)}{1 + S_i(f_k - f)} = 0$. Wir setzen

$$a_{ik} := 2^{-i} \frac{S_i(f_k - f)}{1 + S_i(f_k - f)}.$$

Dann gelten: (i) $\lim_{k\to\infty} a_{ik} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$ (punktweise Konvergenz)

$$\text{(ii) } |a_{ik}| \leq 2^{-i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2$$

("integrierbare" Majorante)

Der Lebesgue'sche Konvergenzsatz – angewendet auf das Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$ – liefert $\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$.

(ii) Ist $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $S(\mathbb{R}^n)$, so folgt nach (i):

$$\lim_{k\to\infty} S_{\alpha_i, \beta_i}(f_k - f) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Gilt zusätzlich die angegebene Ungleichung, folgt (mit der Linearität von A):

$$\lim_{k\to\infty} S_{\alpha,\beta}(Af - Af_k) = 0$$

Dies gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und damit wiederum nach (i): $\lim_{k\to\infty} d(Af_k, Af) = 0$. $\square$

Bsp.: (1) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ sei def. durch $Af(x) = x^\gamma f(x)$ (hierbei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ fest). Dann gilt

$$S_{\alpha,\beta}(Af) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} | x^\alpha \nabla_x^\beta x^\gamma f(x)|.$$

Dies ergibt bei wiederholter Anwendung der Produktregel eine Vielzahl von Termen der Form $x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f(x)$, wobei $|\alpha'| + |\beta'| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| =: N$. Mit der Dreiecksungleichung also

$$S_{\alpha\beta}(Af) \leq C \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq N} \sup_x |x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f(x)|$$

$$= C \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq N} S_{\alpha',\beta'}(f)$$

Nach Lemma 1 ist also A stetig. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir allgemeiner:

Ist $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom und $\tilde{P}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ def. durch $\tilde{P}f(x) := P(x)\cdot f(x)$. Dann ist $\tilde{P}$ stetig.

(2) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Af := \nabla^\gamma f$ ist ebenfalls stetig, denn

$$S_{\alpha,\beta}(Af) = S_{\alpha,\beta}(\nabla^\gamma f) = S_{\alpha,\beta+\gamma}(f).$$

Allgemeiner ist ein Differentialoperator $D: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ der Form $Df := P(\nabla)f$ mit einem Polynom P in n Variablen ebenfalls stetig.

⑥

Da $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, ist die Fouriertransformierte für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx$, und alle bisher hergeleiteten Eigenschaften der FT sind gültig. Insbes. haben wir

$$\mathcal{F}(x^\alpha \nabla^\beta f)(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} \nabla_\xi^\alpha \xi^\beta \mathcal{F}f(\xi).$$

Satz 1: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Bew.: (i) $\quad S_{00}(\mathcal{F}f) = \sup_\xi |\mathcal{F}f(\xi)| \le \|f\|_{L^1}$

$$\lesssim \sup_x (1+|x|^2)^n |f(x)| \lesssim S_{00}(f) + \sum_{k=1}^n S_{\alpha_k,0}(f)$$

mit α_k wie in Bem. (2) oben.

(ii) $\quad S_{\alpha\beta}(\mathcal{F}f) = \sup_\xi |\xi^\alpha \nabla_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi)|$

$$= \sup_\xi |\mathcal{F}(\nabla^\alpha x^\beta f)(\xi)|$$

Vorbem.

$$\underset{(i)}{\le} S_{00}(\nabla^\alpha x^\beta f) + \sum_{k=1}^n S_{\alpha_k,0}(\nabla^\alpha x^\beta f)$$

Dies kann wiederum durch eine endliche Summe von $S_{\alpha_i,\beta_i}(f)$ abgeschätzt werden wie in Bsp (1), (2).

(iii) Damit gezeigt: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Insbesondere ist $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, die Inversionsformel liefert also die Bijektivität von $\mathcal{F}$. Für die Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}$ hat man die Abschätzungen aus (i) und (ii). $\square$

Lemma 2: Ein lineares Funktional $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn es Paare $(\alpha_0, \beta_0), \dots (\alpha_N, \beta_N)$ von Multiindices gibt, so dass

$$|T[f]| \leq C \sum_{i=0}^{N} \mathcal{S}_{\alpha_i, \beta_i}(f)$$

Bew.: Die Richtung "$\Leftarrow$" wie im zweiten Teil des Beweises von Lemma. Also nur noch "$\Rightarrow$" z.z.: T sei also insbesondere im Nullpunkt stetig. Dann ex. $\delta > 0$, so daß $|T[f]| \leq 1 \; \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$d(f, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mathcal{S}_k(f)}{1 + \mathcal{S}_k(f)} \leq \delta$$

Dann ex. $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \frac{\delta}{2}$, und für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\sum_{k=0}^{N} 2^{-k} \frac{\mathcal{S}_k(f)}{1 + \mathcal{S}_k(f)} \leq \frac{\delta}{2}$$

folgt bereits, daß $d(f, 0) \leq \delta$ und also $|T[f]| \leq 1$. Dies gilt insbes. auch für diejenigen f mit $\sum_{k=0}^{N} \mathcal{S}_k(f) \leq \frac{\delta}{2}$. Nun sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann setzen wir (o.E. $\mathcal{S}_0(g) \neq 0$)

$$f = \frac{g}{\sum_{k=0}^{N} \mathcal{S}_k(g)} \cdot \frac{\delta}{2}, \text{ so daß } \sum_{k=0}^{N} \mathcal{S}_k(g) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Dann folgt $|T[f]| \leq 1$ und damit

$$|T[g]| = \frac{2}{\delta} \cdot \sum_{k=0}^{N} \mathcal{S}_k(g) \cdot |T[f]| \leq \frac{2}{\delta} \sum_{k=0}^{N} \mathcal{S}_k(g). \quad \square$$

Beispiele stetiger linearer Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

(1) Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit:

(i) $\exists R > 0$, so daß $\int_{B_R(0)} |\varphi(x)| \, dx < \infty$,

(ii) $\exists N \in \mathbb{N}, C > 0$ so daß für alle $|x| > R$

$$|\varphi(x)| \leq C \langle x \rangle^N.$$

Dann wird durch $T_\varphi[f] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x)\,dx$

ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Begründung: $|T_\varphi[f]| \le \int_{B_R(0)} |\varphi(x)|\,dx \cdot \|f\|_\infty + C\,\|\langle x\rangle^{N+n+1} f\|_\infty$

und die beiden $\|\ \|_\infty$-Ausdrücke sind wiederum durch endliche Summen von $g_k(f)$ zu kontrollieren.

(2) Dieselbe Konstruktion für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Funktionale dieses Typs werden häufig als <u>reguläre</u> Distributionen bezeichnet. Man unterscheidet in der Regel nicht zwischen der Funktion φ und dem Funktional T_φ, ähnlich wie bei der Dualität zwischen $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Es sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft:

$\exists\, N \in \mathbb{N},\ C > 0$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-N}\,d\mu(x) \le C$$

Dann erhält man mit $T_\mu[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu$ wegen

$$|T_\mu[f]| \le C\,\|\langle x\rangle^N f\|_\infty$$

ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere können wir alle endlichen komplexen Borelmaße und auch das Lebesgue-Maß als solche auffassen. Auch hier wird in der Regel nicht zwischen μ und T_μ unterschieden.

Wir sehen: $\underbrace{L^p(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}_{\text{bisherige Definitionsbereiche der Fouriertransformation}} \subset \overset{\text{s.u.}}{S'(\mathbb{R}^n)}$ (bei geeigneter Interpretation).

Die bisherigen Beispiele haben noch keinen Gebrauch der Diff.-barkeit der Funktionen $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gemacht. Anders das folgende, bei dem wir uns auf den Fall $n=1$ beschränken.

(4) Der 'Cauchy'sche Hauptwert' der Funktion $\varphi(x) = 1/x$ wird definiert als

$$P.V.\ \frac{1}{x}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

Auch hierdurch wird ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ gegeben, denn

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx \right| = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} (f(x)-f(0))\frac{dx}{x} \right| + \int_{|x|>1} |f(x)|\frac{dx}{|x|},$$

wobei wir den zweiten Beitrag wie oben durch die $S_{\alpha,\beta}(f)$ kontrollieren können. Den ersten schätzen wir mit dem MWS ab:
$f(x)-f(0) = f'(\vartheta)\cdot x$ und daher $\left|\int_{\varepsilon<|x|<1} (f(x)-f(0))\frac{dx}{x}\right| \le 2\|f'\|_\infty$.

(5) Funktionen, die "zu schnell" mit $x \to \infty$ wachsen, sind bzw. definieren keine stetigen linearen Funktionale, Bsp.: $\varphi(x) = e^{|x|}$ oder $\varphi(x) = e^{|x|^2}$. Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist $T_\varphi[f]$ (wie oben) dann i. allg. nicht einmal definiert.

(6) $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$: $\varphi \longmapsto \nabla^\beta \varphi(x_0)$ definiert ebenfalls ein stetiges lineares Funktional.

Die Gesamtheit aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ bildet einen Vektorraum.

Def.: Den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit

$$S'(\mathbb{R}^n) := \{T : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ T \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Die Elemente von $S'(\mathbb{R}^n)$ heißen <u>temperierte Distributionen</u>.

Bem.: Die Bedeutung des Zusatzes "temperiert" ist mir nicht klar. Man benutzt ihn zur Abgrenzung von der größeren Klasse der Distributionen im allgemeinen Sinn, worunter die stetigen Linearformen auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (oder $C_c^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) zu verstehen sind. Bsp.

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot \delta_k \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^n))' \setminus S'(\mathbb{R}^n)$$

Das erlaubt die Interpretation "temperiert" $\hat{=}$ gemäßigt.
(Im folgenden: Distributionen = Elemente von $S'(\mathbb{R}^n)$.)

<u>Topologie auf $S'(\mathbb{R}^n)$:</u> Üblicherweise versieht man $S'(\mathbb{R}^n)$ mit der sog. "schwach-*-Topologie". Dazu setzt man

$$\mathcal{E} := \{M \subset S(\mathbb{R}^n) : M \text{ endlich}\}$$

und definiert auf $S'(\mathbb{R}^n)$ die Halbnormen

$$\|T\|_M := \sup_{\varphi \in M} |T[\varphi]| \qquad (T \in S'(\mathbb{R}^n),\ M \in \mathcal{E})$$

Hierdurch erhält man ein System $(U_{\varepsilon,M})_{\varepsilon>0,\, M\in\mathcal{E}}$ von Nullumgebungen

$$U_{\varepsilon,M} := \{T \in S'(\mathbb{R}^n) : \|T\|_M < \varepsilon\},$$

die ihrerseits eine Vektorraumtopologie festlegen (Umgebungen eines beliebigen Punktes erhält man durch Verschiebung der Nullumgebungen). Diese stammt nicht von einer Metrik, daher müssen wir uns kurz mit Konvergenz und Stetigkeit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ beschäftigen:

<u>Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:</u> Eine Folge $(T_n)_n$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $M \in \mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \|_M = 0.$$

Da $\mathcal{E}$ nur endliche Teilmengen enthält, ist dies gleichbedeutend mit

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T \ (n\to\infty) \ :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} T_n[\varphi] = T[\varphi] \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Bsp.: Es seien f und g meßbare Funktionen moderaten Wachstums und (f_n) eine Folge meßbarer Funktionen, so daß

(i) $f_n \to f$ λ^n-fast überall

(ii) $|f_n| \leq |g|$.

Die entsprechenden (temperierten) Distributionen seien $T = T_f$ und $T_n = T_{f_n}$. Dann gilt

$$\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T,$$

denn: $$T_n[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = T[\varphi]$$

nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz können wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen (beachte: $f_n \cdot \varphi \to f\varphi$ λ^n-f.ü. und $|f_n \cdot \varphi| \leq |g||\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^n)$!).

Stetigkeit linearer Abbildungen auf $S'(\mathbb{R}^n)$:

Die "Schwach-*-Topologie" ist gerade als die gröbste Topologie gewählt, so dass für jedes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ das lineare Funktional

$$J_\varphi : S'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ T \mapsto J_\varphi[T] := T[\varphi]$$

stetig ist. Denn wenn wir $M := \{\varphi\}$ wählen, so gilt

$$U_{\varepsilon,M} = \{T \in S'(\mathbb{R}^n) : \|T\|_M < \varepsilon\} = \{T \in S'(\mathbb{R}^n) : |J_\varphi[T]| = |T[\varphi]| < \varepsilon\}$$

und das bedeutet $J_\varphi(U_{\varepsilon,M}) \subset B_\varepsilon(0)$, also die Stetigkeit der linearen Abbildung J_φ (zunächst im Nullpunkt und damit wg. der Linearität überall).

Nun sei $A : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ linear. Dann sind äquivalent:

A ist stetig $\Leftrightarrow$ A ist stetig im Nullpunkt

$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, M \in \mathcal{E}\ \exists \delta > 0, \tilde{M} \in \mathcal{E} : \ A(U_{\delta,\tilde{M}}) \subset U_{\varepsilon,M}$

bzw. $\quad AT \in U_{\varepsilon,M}\ \forall T \in U_{\delta,\tilde{M}}$

bzw. $\quad \|AT\|_M < \varepsilon \ \forall T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\|T\|_{\tilde{M}} < \delta$

$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)\ \exists \delta > 0, \tilde{M} \in \mathcal{E} : \ |AT[\varphi]| < \varepsilon$ ———"———

$\Leftrightarrow \ \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)\ \exists C > 0, \tilde{M} \in \mathcal{E} : \ |AT[\varphi]| \leq C \|T\|_{\tilde{M}} \ \forall T \in S'(\mathbb{R}^n)$

Nun sei $A_0 : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ linear. Dann heißt $A =: A_0^t : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, definiert durch $AT[\varphi] := T[A_0\varphi]$ die transponierte Abbildung zu A_0 (häufig werden A und A_0 gleich bezeichnet).

Dann ist $|AT[\varphi]| = |T[\underbrace{A_0\varphi}_{\in S(\mathbb{R}^n)}]| \leq \sup_{\psi \in \tilde{M}} |T[\psi]| = \|T\|_{\tilde{M}}$

für jedes System $\tilde{M} \in \mathcal{E}$, welches $A_0\varphi$ umfaßt. Also sind solche Abbildungen A immer stetig! (Unabhängig davon, ob A_0 stetig ist. Insbes. ist A auch immer folgenstetig.)

Operationen auf $S'(\mathbb{R}^n)$:

(1) Die Distributionsableitung: Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, so definiert man die distributionelle Ableitung

$$\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n), \quad T \longmapsto \nabla^\gamma T$$

durch die Regel der partiellen Integration:

$$\nabla^\gamma T[\varphi] := (-1)^{|\gamma|} T[\underbrace{\nabla^\gamma \varphi}_{\text{Ableitung im klassischen Sinne}}]$$

Bem.: • $\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig (s.o.)

- Mit diesem allgemeinen Begriff der Ableitung ist jedes $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ beliebig oft differenzierbar.
- Für eine reguläre Distribution T_f mit einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion f moderaten Wachstums stimmt die Distributionsableitung mit der klassischen Ableitung überein.

Bsp.: (1) $\nabla^\gamma T_{\delta_{x_0}}[\varphi] \underset{p.D.}{=} (-1)^{|\gamma|} T_{\delta_{x_0}}[\nabla^\gamma \varphi] = (-1)^{|\gamma|} \nabla^\gamma \varphi(x_0)$

(2) $n=1$: $T[\varphi] = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx = T_\theta[\varphi]$, wobei $\theta = \chi_{(0,\infty)}$ die "Heaviside'sche Sprungfunktion" ist. Hierfür ist

$$T'[\varphi] \underset{p.D.}{=} -T[\varphi'] = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = T_{\delta_0}[\varphi],$$

also $T_\theta' = T_{\delta_0}$, was man üblicherweise verkürzt zu $\theta' = \delta_0$

(Allgemein: Im praktischen Gebrauch unterscheidet man recht bald nicht mehr zwischen f und T_f bzw. zwischen μ und T_μ.)

(2) Multiplikation mit einer C^∞-Funktion moderaten Wachstums

Es sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $C > 0, N \in \mathbb{N}$ existieren, für die

$$|a(x)| \leq C \langle x \rangle^N.$$

Dann ist $a \cdot \varphi$ (punktweise definiert) für jedes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ wieder in $S(\mathbb{R}^n)$ und die Abbildung

$$M_a : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \mapsto M_a \varphi = a \cdot \varphi$$

ist linear und stetig. Wir bilden das Produkt $a \cdot T$ $(T \in S'(\mathbb{R}^n))$, indem wir

$$a \cdot T[\varphi] = T[a\varphi]$$

Dann ist der Multiplikationsoperator $M_a^t : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto M_a^t T := aT$ stetig und linear.

Nach einem Satz von Schwartz gibt es keine Multiplikation

$$\cdot : S'(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

die assoziativ und kommutativ ist. Wir zeigen, dass es keine derartige Fortsetzung der oben definierten Multiplikation gibt:

(i) $a \cdot \delta_0 = a(0)\delta_0$, denn $a \cdot T_{\delta_0}[\varphi] \underset{p.d.}{=} T_{\delta_0}[a\varphi] = a(0)\varphi(0)$

$= a(0) \cdot T_{\delta_0}[\varphi]$., insbes.: $x \cdot \delta_0 = 0$,

(ii) $x \cdot P.V.\frac{1}{x}[\varphi] = PV\frac{1}{x}[x\varphi] = \int \varphi(x)\,dx = 1[\varphi]$,

also $x \cdot PV\frac{1}{x} = 1$

Nehmen wir jetzt eine assoziative und kommutative Fortsetzung der Multiplikation auf $S'(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n)$ an, so erhalten wir

$$0 = 0 \cdot PV\frac{1}{x} \underset{(i)}{=} (x \cdot \delta_0) \cdot PV\frac{1}{x} = x \cdot (\delta_0 \cdot PV\frac{1}{x}) \quad \text{(Ass.)}$$

$$\underset{\text{komm.}}{=} (\delta_0 \cdot PV\frac{1}{x}) \cdot x \underset{\text{Ass.}}{=} \delta_0 (PV\frac{1}{x} \cdot x) \underset{(ii)}{=} \delta_0 \cdot 1 \underset{\text{komm.}}{=} 1 \cdot \delta_0 = \delta_0 .$$

Also $0 = \delta_0$. Unfug. $\square$

Bem.: Die Multiplikation einer temperierten Distribution mit einer schnell wachsenden C^∞-Funktion (wie etwa e^x, $e^{|x|^2}$) ist nicht definiert. ∠ bis hierher (20.1.)

(3) Verknüpfung mit einer invertierbaren affin-linearen Transformation

Es sei $A \in GL(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Lx := Ax + b$. Dann definieren wir für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Verknüpfung $T \circ L$ durch

$$T \circ L [\varphi] := |\det A|^{-1} \, T[\varphi \circ L^{-1}]$$

Insbesondere sind damit die Verknüpfung von $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit Translationen τ_a, Rotationen und Streckungen definiert. Plausibilisierung für $T = T_f$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$T_f \circ L[\varphi] = \int f(Lx)\, \varphi(x)\, dx \qquad y = Lx, \ \text{„}dy = |\det A| dx\text{"}$$

$$= |\det A|^{-1} \int f(y)\, \varphi(L^{-1}y)\, dy = |\det A|^{-1} \, T_f[\varphi \circ L^{-1}]$$

Transformationsformel

Bsp. $\delta_0 \circ L[\varphi] = |\det A|^{-1} \delta_0[\varphi \circ L^{-1}]$
$= |\det A|^{-1} \varphi(L^{-1}(0)) = |\det A|^{-1} \varphi(A^{-1}b)$,
also $\delta_0 \circ L = |\det A|^{-1} \delta_{A^{-1}b}$

Spezialfälle: $b = 0$: $\delta_0 \circ A = |\det A|^{-1} \cdot \delta_0$, wird in einer Dimension häufig in der (irreführenden) Form $\delta_0(ax) = \frac{1}{|a|}\delta_0(x)$ notiert.

<u>Bem.</u>: Die Verknüpfung einer Distribution mit einer nicht-linearen Transformation macht in vielen Fällen keinen Sinn. Bsp. $n=1$: $\delta \circ x^2$ ist nicht definiert. Um das Problem einzusehen, verwenden wir eine Dirac-Schar!
(Beachte: $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} T_{K_\varepsilon} = \delta_0$ für jede approximative Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $\mathbb{R}^n$!)

$$"\delta \circ x^2"[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int K_\varepsilon(x^2)\, \varphi(x)\, dx \qquad y = x^2 \quad dy = 2x\,dx \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^\infty K_\varepsilon(y)\, \frac{\varphi(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}\, dy$$

Ist jetzt $\varphi\big|_{[0,1]} = 1$, existiert der Grenzwert nicht in $\mathbb{R}$.

Im speziellen Fall der Dirac-Distribution und einer Transformation: $P \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $P'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $P(x)=0$

definiert man $\delta \circ P[\varphi] := \sum_{x_n} \frac{1}{|P'(x_n)|} \cdot \varphi(x_n)$,

wobei sich die Summe über alle einfachen Nullstellen von P erstreckt. Diese Definition erweist sich als konsistent mit der Approximation von δ_0 durch Dirac-Scharen.

Ist $P \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $|\nabla P(x)| \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, so definiert man für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\delta \circ P[\varphi] := \int_{P=0} \varphi(x)\, \frac{dS(x)}{|\nabla P(x)|}$$

Auch dies ist konsistent mit $\delta_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} K_\varepsilon$!

Diese Definitionen sind aber speziell auf das Dirac-Maß zugeschnitten und nicht allgemein formulierbar (betrachte etwa $\delta^{(n)} \circ P$!)

(4) Faltung von $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $g \in S(\mathbb{R}^n)$

Es seien zunächst f, g und $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} g * f(x) \cdot \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\,dy \cdot \varphi(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(x)\,dx\,dy$$

Schreiben wir $\tilde{g}(x) = g(-x)$, erweist sich das innere Integral als die Faltung $\tilde{g} * \varphi$, so das insgesamt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g * f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\tilde{g} * \varphi(x)\,dx .$$

Das führt uns auf die folgende

Def.: Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in S(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Faltung ~~$T * g$~~ $g * T$ durch

$$g * T[\varphi] = T[\tilde{g} * \varphi] \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Ebenso wie die durch in (1) - (3) ~~definierten Operationen~~ definierten Operationen wird durch die Faltung mit festem $g \in S(\mathbb{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung

$$g * : T \longmapsto g * T, \quad S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

definiert.

(5) Fouriertransformation

Def.: $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto \mathcal{F}T := \hat{T}$, def. durch

$$\hat{T}[\varphi] = T[\hat{\varphi}] \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

heißt die (distributionelle) Fouriertransformation.

$\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig (sowohl in der schwachen als auch in der starken Topologie). Wir setzen für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\check{\varphi}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \;,$$

so daß nach der Fourierinversionsformel $\hat{\check{\varphi}} = \check{\hat{\varphi}} = \varphi$ ist, und für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\check{T}[\varphi] := T[\check{\varphi}] \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist per def. $\hat{\check{T}}[\varphi] = \check{T}[\hat{\varphi}] = T[\check{\hat{\varphi}}] = T[\varphi]$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, also $\hat{\check{T}} = T$ und ebenso $\check{\hat{T}} = T$. Also ist

$$\mathcal{F}^{-1}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto \check{T}$$

invers zu $\mathcal{F}$ und ebenfalls stetig. Also gilt:

Satz 2: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus (von Frécheträumen).

Durch die Konstruktion werden die wesentlichen Eigenschaften der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. auf $S(\mathbb{R}^n)$ auf die distributionelle Fouriertransformation vererbt. Z.B. haben wir für die Verknüpfung mit affin-linearen Funktionen:

Lemma 2: Es seien $T\in S'(\mathbb{R}^n)$, A eine invertierbare $n\times n$-Matrix und $a\in\mathbb{R}^n$. Dann gelten:

(i) $$\widehat{T\circ A} = \frac{1}{|\det A|}\,\hat{T}\circ(A^{-1})^t,$$

(ii) $$\widehat{\tau_a T} = e^{-ia\xi}\hat{T} \quad \text{sowie} \quad \widehat{e^{ia\xi}T} = \tau_a\hat{T}.$$

Bew.: Die angegebenen Formeln gelten für $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ aufgrund der Lemmata 1.4 und 1.5 in Abschnitt 1. Sei nun $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ bel.:

Zu (i): $$\widehat{T\circ A}[\varphi] = T\circ A[\hat{\varphi}] \quad (\text{Def. } \hat{}\ \text{für } T\in S'(\mathbb{R}^n))$$

$$= \frac{1}{|\det A|}\, T[\hat{\varphi}\circ A^{-1}] \quad (\text{Def. } T\circ A)$$

$$= T[\widehat{\varphi\circ A^t}] \quad ((\text{i}) \text{ für } \varphi \text{ mit } A^t \text{ anstelle von } A)$$

$$= \hat{T}[\varphi\circ\underbrace{((A^t)^{-1})^{-1}}_{B}] \quad (\text{Def. } \hat{}\ )$$

$$= |\det B|\,\widehat{T\circ B}[\varphi] \quad (\text{Def. } T\circ A),$$

Also $$\widehat{T\circ A} = \frac{1}{|\det A|}\,\hat{T}\circ(A^{-1})^t.$$

2. Formel gültig für φ anstelle von T

Zu (ii) (Übung!) $$\widehat{\tau_a T}[\varphi] \underset{\text{p.D.}}{=} \tau_a T[\hat{\varphi}] \underset{\text{p.D.}}{=} T[\tau_{-a}\hat{\varphi}] = T[\widehat{e^{-ia\xi}\varphi}]$$

$$\underset{\text{p.D.}}{=} \hat{T}[e^{-ia\xi}\varphi] = e^{-ia\xi}\hat{T}[\varphi]$$

und

$$\tau_a\hat{T}[\varphi] \underset{\text{p.D.}}{=} \hat{T}[\tau_{-a}\varphi] \underset{\text{p.D.}}{=} T[\widehat{\tau_{-a}\varphi}] = T[e^{ia\xi}\hat{\varphi}]$$

1. Formel für φ statt T

$$\underset{\text{p.D.}}{=} e^{ia\xi}T[\hat{\varphi}] = \widehat{e^{ia\xi}T}[\varphi].$$

□

Lemma 3: Es sei $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann gelten

(i) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \widehat{T}$ und (ii) $\widehat{\xi^\alpha T} = (i\nabla_x)^\alpha \widehat{T}$

Bew. (i) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T}[\varphi] \underset{p.D.}{=} \nabla_\xi^\alpha T[\widehat{\varphi}] \underset{p.D.}{=} (-1)^{|\alpha|} T[\nabla_\xi^\alpha \widehat{\varphi}]$

$$\overset{!}{=} i^{|\alpha|} T[\widehat{x^\alpha \varphi}] \underset{p.D.}{=} i^{|\alpha|} \widehat{T}[x^\alpha \varphi] = (ix)^\alpha \widehat{T}[\varphi]$$

zweite Formel für φ statt T

$$\Rightarrow \widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \widehat{T}$$

1. Formel für $T \Rightarrow \varphi$

(ii) $\widehat{\xi^\alpha T}[\varphi] \underset{p.D.}{=} \xi^\alpha T[\widehat{\varphi}] = T[\xi^\alpha \widehat{\varphi}] \overset{!}{=} (-i)^{|\alpha|} T[\widehat{(\nabla_x)^\alpha \varphi}]$

(Übung!)

$$= (i\nabla_x)^\alpha \widehat{T}[\varphi] \quad (\text{Def } \widehat{\ } \text{ und } \nabla^\alpha \text{ für } T)$$

□

Und schließlich haben wir auch in 2 Formulierungen den

Faltungssatz: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ gelten

(i) $\widehat{f * T} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}\, \widehat{T}$ und (ii) $\widehat{f \cdot T} = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{T}$

Bew.: (i) ist bekannt, wenn auch $T \in S(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies verwenden wir zum Beweis von (ii):

$\widehat{f \cdot T}[\varphi] \underset{p.D.}{=} f \cdot T[\widehat{\varphi}] = T[\widehat{\check{f}} \cdot \widehat{\varphi}] \underset{(i)}{=} (2\pi)^{-n/2} T[\widehat{\check{f} * \varphi}]$

$$\underset{p.D.}{=} (2\pi)^{-n/2} \widehat{T}[\tilde{\widehat{f}} * \varphi] \underset{p.D}{=} (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{T}[\varphi] \Rightarrow (ii)$$

zu (i) $\widehat{f * T}[\varphi] \underset{p.D.}{=} f * T[\widehat{\varphi}] \underset{p.D.}{=} T[\tilde{f} * \widehat{\varphi}] \underset{(ii)}{=} (2\pi)^{n/2} T[\widehat{\widehat{f} \cdot \varphi}]$

$$\underset{p.D.}{=} (2\pi)^{n/2} \widehat{T}[\widehat{f} \cdot \varphi] = (2\pi)^{n/2} (\widehat{T} \cdot \widehat{f})[\varphi] \Rightarrow (i).$$

Beispiele zur distributionellen Fouriertransformation

Die folgenden sog. "Integraldarstellungen" einiger Distributionen sind den Lehrbüchern zur theoretischen Quantenmechanik von Messiah und Schwabl entnommen, die zweifellos zu den besseren ihrer Art zählen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk, \quad \delta'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\, e^{ikx}dk$$

(Messiah, Quantenmechanik 1, Appendix A2, (A.22), (A.23))

und

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k-i\varepsilon}\,dk$$

$$\delta_+(x) := -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{ikx}dk$$

$$\delta_-(x) := \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{ikx}dk$$

(Schwabl, Quantenmechanik, Anhang A, (A.21)-(A.23))

Diese Formeln sind allesamt Unfug, weil die "Integrale" auf der rechten Seite nicht existieren, und zwar weder als Lebesgue-, noch als uneigentliches Riemann-Integral, noch als Cauchy'scher Hauptwert. Messiah bemerkt immerhin ein Problem und versucht, den Schaden zu beheben mit der folgenden Erläuterung:

"Alle diese Gleichungen bedeuten, dass man die eine Seite durch die andere ersetzen kann, wenn sie als Faktor unter einem Integral über x auftritt. Man kann sie mit Hilfe der Distributionstheorie streng beweisen." (Messiah 1, p. 422)

Das kann man natürlich nicht, aber in Bezug auf die erste Formel für $\hat{f}$ wohl das Folgende gemeint sein:

$$f(0) = \delta_0[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} f(x)\,dx\,dk = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{f}(k)\,dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\check{f}] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\vee}[f]$$

Also: $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\vee} = \delta_0$ oder auch $\hat{\delta}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und, da $\delta_0 = \delta_0 \circ (-1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\wedge} = \delta_0$. Allgemein gilt in n-Raumdimensionen:

<u>Bsp. 1:</u> $\widehat{\nabla^\alpha \delta_0}[f] \underset{\text{Lemma 8}}{=} (ix)^\alpha \hat{\delta}_0 [f] = \hat{\delta}_0 [(ix)^\alpha f]$ ← Def. Multiplikation mit C^∞-Funktionen mod. Wachstums

$$= \widehat{(ix)^\alpha f}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int (ix)^\alpha f(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2} (ix)^\alpha [f],$$

Def. Fourier-transformation, δ_0 — reguläre Distribution

kurz ausgedrückt: $\widehat{\nabla^\alpha \delta_0} = (2\pi)^{-n/2} (ix)^\alpha$,

und den Spezialfall $n=1$, $\alpha=1$ finden wir dann auch als die zweite Formel bei Messiah wieder: Dort wird δ_0' als inverse Fouriertransformierte der Funktion $\frac{ix}{\sqrt{2\pi}}$ "dargestellt".

Bsp. 2: Berechnung von $\hat{\Theta}$ für die Heaviside-Funktion Θ (eindimensionales Problem!)

Zu diesem Zweck schreiben wir

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} e^{-\varepsilon x} \Theta(x),$$

wobei der Grenzwert ein punktweiser und wg. der Majorisierung durch die konstante Funktion $f(x) \equiv 1$ auch ein limes in $S'(\mathbb{R})$ ist. Nun wissen wir, dass für

$\varphi(x) = e^{-x}\theta(x)$ gilt $\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\xi}$.

Für $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(\varepsilon x)$ bedeutet das

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+i\frac{\xi}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \frac{1}{\xi - i\varepsilon}$$

und mit der Stetigkeit der Fouriertransformation als lin. Transformation von $S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ folgt

$$\hat{\theta}[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{\varphi}_\varepsilon[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - i\varepsilon} \varphi(x)\,dx$$

Dies wird dann häufig als $\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \frac{1}{x - i0}$ oder in der von Schwabl gewählten Form ausgedrückt, was aber formal wenig zufriedenstellend ist. Daher schreibt man $\hat{\theta}$ auch als Linearkombination aus δ_0 und $P.V.\frac{1}{x}$. Zu diesem Zweck ~~[illegible]~~ setzt man $\theta_-(x) = \theta(-x)$, was $\theta + \theta_- = 1$ ergibt und damit

$$\hat{\theta} + \hat{\theta}_- = \hat{1} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0 .$$

Andererseits ist $\hat{\theta}_- = \widehat{\theta \circ (-1\!\!1)} = \hat{\theta} \circ (-1\!\!1)$ (Lemma 2), d.h.

$$\hat{\theta}_-[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-x - i\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\,dx,$$

woraus sich

$$(\hat{\theta} - \hat{\theta}_-)[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} + \frac{1}{x + i\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x)\,dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, P.V.\frac{1}{x}[\varphi]$$

Übung, s. 23E

ergibt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \varphi(x)\,dx - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} (\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \int_{|x|>\varepsilon} \left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{x}{x^2}\right)\varphi(x)\,dx = I + II$$

wobei

$$\underset{\text{MWS}}{I \leq} \|\varphi'\|_\infty \cdot \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \leq \|\varphi'\|_\infty \cdot \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

$$II = \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x^3 - x^3 - x\varepsilon^2}{x^2(x^2+\varepsilon^2)} \cdot \varphi(x)\,dx$$

$$\leadsto |II| \leq \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{|x|\varepsilon^2}{x^2(x^2+\varepsilon^2)} |\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\varepsilon^2}{|x|(x^2+\varepsilon^2)} |\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq 2\varepsilon^2 \|\varphi'\|_\infty \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \varepsilon^2 \int |\varphi(x)|\,dx$$

$$\lesssim \varepsilon^2 \|\varphi'\|_\infty \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \|\varphi\|_{L^1} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

Fassen wir zusammen:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}\{(\hat{\theta}+\hat{\theta}_-) + (\hat{\theta}-\hat{\theta}_-)\} = \frac{1}{2}\{\sqrt{2\pi}\,\delta_0 - i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\text{P.V.}\,\tfrac{1}{x}\}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\hat{\theta} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\delta_0 - i\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{P.V.}\,\frac{1}{x}}$$

und entsprechend $\hat{\theta}_- = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_0 + i\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{P.V}\,\frac{1}{x}$. Nun haben wir zwei Darstellungen von $\hat{\theta}$ hergeleitet:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i}\cdot\frac{1}{x-i0} = \hat{\theta} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\delta_0 - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\text{P.V.}\,\frac{1}{x}$$

Multiplikation mit $\sqrt{2\pi}\,i$ ergibt:

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\,\delta_0 + \text{P.V.}\,\frac{1}{x}$$

und entsprechend gilt $\frac{1}{x+i0} = -i\pi\,\delta_0 + \text{P.V.}\,\frac{1}{x}$. Diese Identitäten werden in der Literatur als <u>Sokhotzky's Formeln</u> bezeichnet.

<u>Bsp.</u> 3 Fouriertransformierte von $e^{-i|x|^2}$ und (noch einmal) die Schrödingergleichung.

Wir sind jetzt in der Lage, das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

unter der Voraussetzung $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ zu lösen:

$$\hat{u}_t(\xi,t) = -i|\xi|^2\hat{u}(\xi,t), \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \text{o.E.: } t>0$$

$\rightsquigarrow \quad \hat{u}(\xi,t) = e^{-it|\xi|^2}\,\hat{u}_0(\xi)$ (waren bereits in der Übung bekannt)

$\rightsquigarrow \quad u(x,t) = (2\pi)^{-n/2}\,\check{S}_t * u_0(x)$, (Faltungssatz, jetzt allerdings für Distributionen)

mit $S_t(\xi) = e^{-it|\xi|^2}$

Unsere Aufgabe ist also die Berechnung der Fouriertransformierten $\check{S}_t = \hat{S}_t$ (letzteres, da $S_t(\xi) = S_t(-\xi)$ ist). Zu diesem Zweck schreiben wir

$$S_t(\xi) = e^{-it|\xi|^2} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-(it+\varepsilon)|\xi|^2},$$

wobei der Grenzwert punktweise ist und durch die konstante Funktion 1 majorisiert wird, also auch als Grenzwert in $S'(\mathbb{R}^n)$ aufgefaßt werden kann. Nun hatten wir bereits in Abschnitt 1 (Bsp. 1.2 und Folgerung daraus) gesehen, dass für $\varphi_\lambda(\xi) = e^{-\lambda|\xi|^2/2}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re}\lambda > 0$ gilt $\hat{\varphi}_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{2\lambda}}$. Dies können wir hier verwenden mit $\lambda = 2(it+\varepsilon)$. Es folgt:

$$\hat{S}_t(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sqrt{2(it+\varepsilon)}^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4(it+\varepsilon)}} = (2t)^{-n/2} e^{-\frac{in\pi}{4}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

Hieraus erhalten wir dann als Lösung der Schrödingergleichung:

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{in\pi}{4}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy,$$

was wie erwartet aus der entsprechenden Darstellung für die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung folgt, wenn man dort formal t durch it ersetzt.

<u>Bsp. 4</u>: Es sei $n \geq 1$ (die Raumdimension), $0<\alpha<n$ und

$$f_\alpha(x) = 2^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)|x|^{-\alpha}.$$

Dann ist $\hat{f}_\alpha = f_{n-\alpha}$.

(<u>Bem.</u>: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ für $p=\frac{n}{\alpha}$. Aber $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)\ \forall q$!)

<u>Bew.</u>: Dazu benutzen wir die Darstellung

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}}\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t2}{|x|^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{2}{|x|^2}\,dt$$

$$t=\frac{\lambda|x|^2}{2},\quad d\lambda = 2|x|^{-2}dt$$

$$= 2^{\frac{\alpha}{2}}|x|^{-\alpha}\cdot\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt}_{=\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = f_\alpha(x).$$

Damit folgt für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}_\alpha[\varphi] = f_\alpha[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x)\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty e^{-\lambda\frac{|x|^2}{2}}\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda\;\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda\frac{|x|^2}{2}}\hat{\varphi}(x)\,dx\;d\lambda \qquad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}\lambda^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}}\varphi(\xi)\,d\xi\;d\lambda \qquad \text{Plancherel + Bsp 1.2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha-n}{2}-1}e^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}}\,d\lambda\;\varphi(\xi)\,d\xi$$

Die Substitution $\mu=\frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow d\mu = -\frac{1}{\lambda^2}d\lambda$ ergibt

$$\text{inneres Integral} = \int_0^\infty \mu^{\frac{n-\alpha}{2}-1}e^{-\mu\frac{|\xi|^2}{2}}\,d\mu = f_{n-\alpha}(\xi)$$

$\square$

und damit die Beh.