1.2 Die Fouriertransformation komplexer Borelmaße auf dem $\mathbb{R}^n$

Kurze Erinnerung: Maße und Maßräume / Bezug zur Funktionalanalysis

Allgemein | für uns in erster Linie relevant

- X (Grund-) Menge ; $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{A} \subset P(X)$ σ-Algebra
  enthält stets $\emptyset$, ist abgeschlossen unter ^{c}, $\sum_{n\in\mathbb{N}}$
  ; $\mathcal{B}^n$ = kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen umfaßt, wird die "von den offenen Mengen erzeugte" σ-Algebra genannt, ihre Elemente heißen Borel-M.
- $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $A \mapsto \mu(A)$
  mit $\mu(\emptyset)=0$, $\mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
  (nicht negative, σ-additive Mengen-fkt.)
  ; λ^n = Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$; stimmt auf Quadern mit deren elementargeometrischem Inhalt überein

meßbare Räume und Maßräume

$(X,\mathcal{A})$, $(X,\mathcal{A},\mu)$; $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$, $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n,\lambda^n)$

endliche Maße

$\mu(X) < \infty$

- Maße mit integrierbaren Dichten (absolutstetig) — entsprechend,
- Dirac-Maße $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 : x\in A \\ 0 : x\notin A \end{cases}$

(+ Konvexkombinationen) — (Ober-) flächenmaße kompakter Mengen mit (stkw.) glattem Rand

- Anwendung: W-Maße: $P(X)=1$

Aus den endlichen Maßen wird ein $\mathbb{C}$-Vektorraum gebildet:

Def.: Es sei $|\mu| : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ ein endliches Maß und $\varphi : X \to S^1 \; (= \{z\in\mathbb{C}, |z|=1\})$ $\mathcal{A}$-meßbar. Dann heißt

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \text{ def. durch } \mu(A) := \int_A \varphi \, d|\mu|$$

ein komplexes Maß.

Bem.:

(1) Jede σ-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ läßt sich in dieser Weise darstellen.

(2) Für komplexe Maße μ und ν kann man Addition und skalare Multiplikation "punktweise" erklären: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(A) := \alpha\mu(A) + \beta\nu(A)$$

Auf diese Weise erhalten wir einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, den wir mit $\mathcal{M}(X)$ bzw. mit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen.

(3) Auf $\mathcal{M}(X)$ definiert man die Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$. Diese wird auch als die Totalvariation von μ bezeichnet. $(\mathcal{M}(X), \| \ \|)$ ist ein Banachraum.

Für manche Rechnungen ist es zweckmäßig, $(\mathcal{M}(X), \| \ \|)$ als einen Dualraum einer bestimmten Klasse stetiger Funktionen auffassen zu können (die Totalvariation ist oft nicht leicht zu bestimmen!). Dazu muß man weitere Voraussetzungen an die Grundmenge X stellen:

X ist ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum, d.h.:

- ein topologischer Raum, in dem das Trennungsaxiom gilt (zwei verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen) und der ~~lokal~~
- lokal kompakt ist, d.h.: Jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung.

$\mathcal{M}(X)$ bezeichnet fortan die Gesamtheit aller komplexen regulären Borelmaße (d.h. man hat Approximierbarkeit von innen durch Kompakta, von außen durch offene Mengen)

Für eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ ist dann der Begriff der Stetigkeit erklärt ($f^{-1}(\Omega)$ offen für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen) und man setzt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = z \ (\in \mathbb{C}) \ :\Longleftrightarrow$$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $K_\varepsilon \subset X$, so dass für alle $x \in K_\varepsilon^c$ gilt: $|f(x) - z| < \varepsilon$.

Ferner: $C_0^0(X) := \{ f: X \to \mathbb{C} \text{ stetig} \mid \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \}$

<u>Beachte</u>: Falls X kompakt ist, gilt $C^0(X) = C_b^0(X) = C_0^0(X)$.

Versehen mit der Supremumsnorm ist $C_0^0(X)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von

$$C_b^0(X) := \{ f: X \to \mathbb{C} \text{ stetig und beschränkt} \}$$

und also ein Banachraum. Der Zusammenhang zwischen $C_0^0(X)$ und $\mathcal{M}(X)$ wird hergestellt durch den:

<u>Darstellungssatz von Kakutani (1941)</u>: Es sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dann gilt:

Die Abbildung

$$\Phi: \mathcal{M}(X) \longrightarrow (C_0^0(X))', \ \mu \longmapsto \Phi(\mu),$$

definiert durch $\Phi(\mu)[f] := \int f \, d\mu$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Bem.:

(1) Vollständiger Bew. vermutlich nur in der Originalarbeit. Für positive Maße / lineare Funktionale in Halmos: Measure Theory, §56. Evtl. im Maßtheorie-Buch von Elstrodt. Spezialfall: X kompakt: Satz von Riesz – s. M.V. §13.

(2) Trivialer Teil der Aussage: Durch jedes komplexe Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ wird mit

$$\Phi(\mu)[f] := \int f \, d\mu$$

ein stetiges lineares Funktional auf $C_0^0(X)$ definiert, denn es gilt

$$|\Phi(\mu)[f]| \leq \int |f| \, d|\mu| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|$$

(3) Der nichttriviale Teil des Satzes von Kakutani lautet: Zu jedem stetigen linearen Funktional

$$g : C_0^0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

existiert ein komplexes Borel-Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$, so daß $g[f] = \int f \, d\mu$ für alle $f \in C_0^0(X)$.

(4) Nützlich ist auch die Aussage 'isometrisch'. Sie bedeutet:

$$\underbrace{|\mu|(X)}_{\text{häufig nicht leicht zu ermitteln,}} = \|\mu\| = \|\Phi(\mu)\|_{(C_0^0(X))'} = \sup_{\substack{f \in C_0^0(X) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \left| \int f \, d\mu \right|$$

es gilt z.B. $|\mu|(X) = \sup \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(X_n)|$, Supremum über alle abzählbaren Partitionen von X.

Wir spezialisieren den Grundraum X jetzt noch etwas weiter:

$X = G$ mit einer lokal-kompakten abelschen Gruppe

(d.h. wir nehmen <u>zusätzlich</u> die Existenz einer Addition

$+ : G \times G \to G$ an, so daß $(G,+)$ eine abelsche Gruppe ist.)

Dann können wir die Faltung zweier komplexer Maße definieren und damit $\mathcal{M}(G)$ zu einer Banach-Algebra machen!

<u>Def.</u>: Es seien $(G,+)$ eine lokal-kompakte abelsche Gruppe und $\mu, \nu \in \mathcal{M}(G)$. Für $A \in \mathcal{B}(G)$ sei

$$\mu * \nu(A) := \int_{G\times G} \chi_A(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

Dann heißt $\mu * \nu$ die <u>Faltung</u> von μ und ν.

<u>Bem.</u>: (1) $\mu * \nu(A) = \int_G \nu(A-x)\, d\mu(x)$

$$= \int_G \mu(A-y)\, d\nu(y)$$

(2) $\mu * \nu \in \mathcal{M}(G)$ (folgt aus den Eigenschaften des Produktmaßes!)

(3) $(\mathcal{M}(G), +, *)$ bildet eine Algebra mit δ_0 als Einselement

(4) $\mathcal{M}(G)$ ist ein B-Raum und wir haben

$$\|\mu * \nu\| = \sup_{\substack{f \in C_0^0(G) \\ \|f\|_\infty \le 1}} \left| \int_G f \, d(\mu * \nu) \right|$$

$$= \sup_{f - ''} \left| \int_{G \times G} f(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \right|$$

$$\le \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|f\|_\infty \int_{G \times G} d|\mu|(x) \, d|\nu|(y) \le \|\mu\| \, \|\nu\| ,$$

d.h. $(\mathcal{M}(G), +, *)$ mit der hier eingeführten Norm ist eine B-Algebra mit Einselement.

Wo treten Faltungen in natürlicher Weise in den Anwendungen auf?

- <u>Lineare partielle Dgln:</u> Gegeben sei ein linearer Differenzialoperator $L = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x) \nabla_x^\alpha$ mit stetigen Funktionen c_α und ferner eine rechte Seite $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist eine Lösung u der pDG $Lu = f$.

Häufig angewendete Strategie: Man bestimmt eine "Fundamentallösung" von L, das ist eine Lösung der pDG $LE = \delta_0$ mit dem Dirac-Maß δ_0 als Inhomogenität. Dann erhält man unter bestimmten Regularitätsvoraussetzungen eine Lösung des allgemeinen Problems durch Faltung mit f:

Man setzt $u := E * f$ und erhält

$$Lu = L(E * f) = (LE) * f = \delta_0 * f = f.$$

- Wahrscheinlichkeitstheorie: Verteilung von Summen u.a. zufälliger Veränderlicher

Menge

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω und eine Abbildung ("zufällige Veränderliche") $X : \Omega \to \underset{G}{\mathbb{R}^n}$. Man definiert das von X induzierte Maß P_X durch

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

bzw. durch

$$P_X[f] := P[f \circ X], \text{ d.h. } \int f \, dP_X = \int f \circ X \, dP$$

Eine Folge ~~von~~ zuf. Ver. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt P-u.a., falls

$$P_{(X_i)_{i \in \mathbb{N}}} = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} P_{X_i}$$

In diesem Fall ist $P_{\sum_{i=1}^{n} X_i} = P_{X_1} * P_{X_2} * \dots * P_{X_n}$.

Wir geben jetzt den Anspruch möglicher Allgemeinheit auf und 1.2
spezialisieren uns auf den Fall $G = \mathbb{R}^n$. (8)

Def.: Für ein komplexes Maß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ heißt
$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, def. durch $\hat{\mu}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\mu(x)$
die Fouriertransformierte von μ.

Lemma 2.1: $\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist glm. stetig und beschränkt.

Bew.: Beschränktheit: $|\hat{\mu}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu(x)|$.

glm. Stetigkeit: $\hat{\mu}(\xi+h) - \hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}(e^{-ixh} - 1) d\mu(x)$

$\Rightarrow \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{\mu}(\xi+h) - \hat{\mu}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ixh} - 1| \, d|\mu|(x)$

Da $|e^{-ixh} - 1| \to 0$ $(|h| \to 0)$ punktweise und $|e^{-ixh} - 1| \leq 2$
folgt die Behauptung mit Lebesgue. □

Bsp. 2.1.: $\mu = \delta_a$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ fest

$\Rightarrow \hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\delta_a(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ia\xi}$.

Wir können also im allgemeinen keinen decay
(= Abfall) erwarten. (Riemann Lebesgue gilt also nur
für Maße mit L^1-Dichten!)

Lemma 2.2 (Verschiebungs- und Faltungssatz):

Es seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:

(1) $\widehat{\tau_y \mu}(\xi) = e^{-i\xi y}\hat{\mu}(\xi)$ (hierbei $\tau_y \mu(A) = \mu(A-y)$)

(2) $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi)$.

Bem.: Teil (1) wird in ÜSA1 auf affin-lineare Transformationen verallgemeinert.

Bew.: (1) $\tau_y \mu(A) = \mu(A-y) = \mu[\chi_{A-y}] = \int \chi_{A-y}(x)\,d\mu(x)$

$$= \int \chi_A(x+y)\,d\mu(x),$$

denn: $\chi_{A-y}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A-y \Leftrightarrow x+y \in A \Leftrightarrow \chi_A(x+y) = 1$.

Bei Konstruktion des Integrals nach einem Maß ergibt

$$\tau_y \mu[f] = \int f\,d\tau_y\mu = \int f(x+y)\,d\mu(x)$$

für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), |\mu|)$. Insbes.:

$$\widehat{\tau_y \mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(x+y)\xi}\,d\mu(x) = e^{-iy\xi}\cdot(2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}\,d\mu(x).$$

(2) $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-i(x+y)\xi}\,d\mu(x)\,d\nu(y)$ (Argument wie oben)

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\,d\mu(x)\right)\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\,d\nu(y)\right)$$

Satz 2.1: Eindeutigkeitssatz: Es sei $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\mu}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mu = 0$.

Folgerung: Sind $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\nu}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $\mu = \nu$. Dies folgt aus Satz 2.1 und der Linearität der Fouriertransformation.

Bem.! Den Eindeutigkeitssatz für L^1-Funktionen haben wir aus der Inversionsformel gewonnen, die für Maße nicht zur Verfügung steht. Aber wir versuchen im Beweis, das allgemeinere Problem hierauf zurückzuführen!

Bew.: (1) Ist $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\mu * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Genauer gesagt: Setzen wir $\mu_f(A) := \int_A f \, dA$, so besitzt $\mu * \mu_f$ die Lebesgue-Dichte

$$g(x) = \int f(x-y) \, d\mu(y).$$

Bew. dieser Teilaussage: Dass $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt aus

$$\int |g(x)| dx = \int \Big| \int f(x-y) \, d\mu(y) \Big| dx \le \int \int |f(x-y)| \, d|\mu|(y) \, dx$$

$$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int \int |f(x-y)| dx \; d|\mu|(y) = \|f\|_{L^1} \, \|\mu\|.$$

Ferner: $$\mu * \mu_f(A) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_A(x+y) f(x) \, d\mu(y) \, dx$$

$$\text{Fubini} \quad = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x+y) f(x) dx \quad d\mu(y)$$

$$\text{Translation} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f(x-y) dx \quad d\mu(y)$$

$$\text{Fubini} \quad = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu(y) \quad dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \; g(x) dx$$

(Diese Aussage ist für praktische Zwecke von unabhängigem Interesse!)

(2) Wir gehen jetzt von $\hat{\mu}(\xi)=0 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n$ aus und falten μ mit einer approximativen Einheit K_ε. Nach dem Faltungssatz ist dann

$\widehat{\mu * K_\varepsilon}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\,\hat{\mu}(\xi)\,\widehat{K_\varepsilon}(\xi) = 0 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n$ und

daher nach (1) und dem Eindeutigkeitssatz für L^1-Funktionen $\mu * K_\varepsilon = 0$ $(\varepsilon>0$ beliebig$)$.

Für $f\in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ folgt:

$$0=\int f \, d\mu * K_\varepsilon = \int f(x)\, d(\mu * K_\varepsilon)(x)$$

$$\underset{(1)}{=} \iint f(x)\, K_\varepsilon(x-y)\, d\mu(y)\, dx \,.$$

Wählen wir jetzt einen symmetrischen Kern wie etwa den Gauss-Kern:

$$0 = \int K_\varepsilon * f(y)\, d\mu(y) \qquad \forall \varepsilon>0.$$

Nun ist $f\in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und daher gleichmäßig stetig.

Daher gilt $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} K_\varepsilon * f(x) = f(x)$ mit gleichmäßiger Konvergenz und dies impliziert

Lebesgue, μ endlich.

$$0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int K_\varepsilon * f(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{\varepsilon\searrow 0} K_\varepsilon * f(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int f(x)\, d\mu(x).$$

Dies gilt für alle $f\in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Damit ist μ, aufgefaßt als stetiges lineares Funktional auf $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ das Nullfunktional. Wg. $(C_0^0(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ also $\mu=0$.

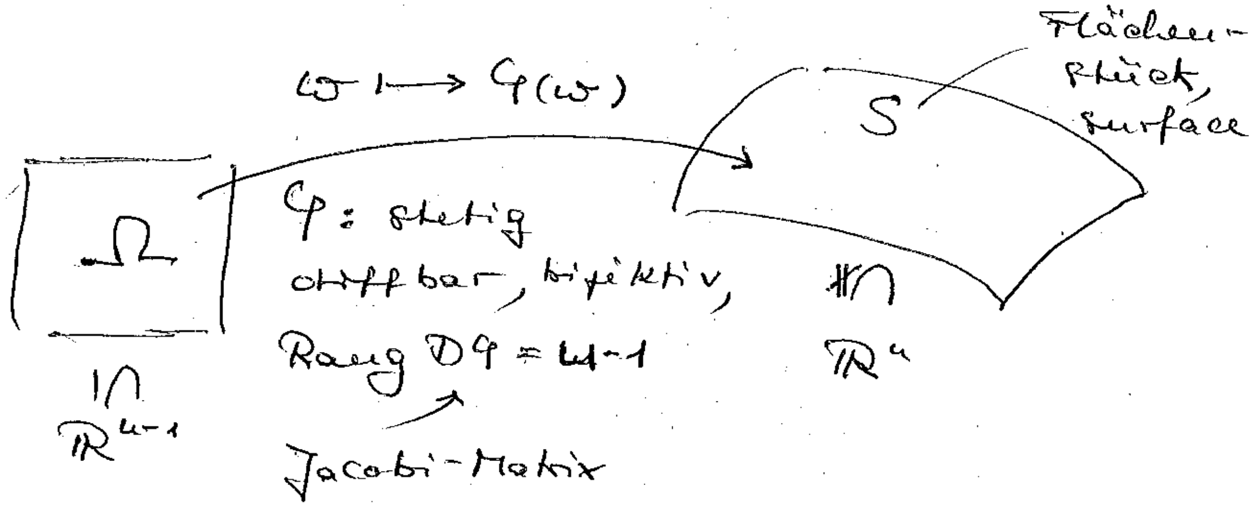
$\square$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie treten in erster Linie auf

- Maße mit Lebesgue-Dichten
- diskrete Maße bzw solche mit Zähldichten

sowie Konvexkombinationen daraus (möglicherweise sieht das anders aus, wenn man die W-Theorie im Mehrdimensionalen betreibt). Bei den Anwendungen auf lineare pDgln. sind auch Flächenmaße von Interesse, insbesondere das der Sphäre. Hintergrund: Sowohl in der elementaren Theorie der harmonischen Funktionen (= Lösungen der Laplace-Gleichung) wie auch bei der Wellengleichung (insbes. in ungeraden Raumdimensionen) spielen sphärische Mittelwerte eine zentrale Rolle.

<u>Kurze Erinnerung</u>: Flächenmaße - Integration über Hyperflächenstücke (= "glatte" Flächenstücke)



Die Abbildung φ wird als Parametrisierung oder auch als Karte bezeichnet.

Das Flächenmaß σ von S wird nun meistens in folgender Weise konstruiert. Man definiert die Gram'sche Matrix® (abhängig von φ, Funktion von $\omega \in \Omega$) als

$$G_\varphi(\omega) = D\varphi(\omega)^t \, D\varphi(\omega)$$

und die Gram'sche Determinante

$$g_\varphi(\omega) = \det G_\varphi(\omega) \quad (>0).$$

Damit erklärt man für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ das Flächenmaß σ der Fläche S durch

$$\sigma(A) = \int_\Omega \chi_{A \cap S}(\varphi(\omega)) \sqrt{g_\varphi(\omega)} \, d\omega$$

Hierdurch wird in der Tat ein Maß definiert (φ bijektiv, Beppo-Levi) und man hat die übliche Konstruktion des Integrals z.B. für nicht-negative meßbare oder für L^1-Funktionen:

$$\sigma[f] = \int_S f(x) \, d\sigma(x) = \int_\Omega f(\varphi(\omega)) \sqrt{g_\varphi(\omega)} \, d\omega$$

Diese – im wesentlichen definierende – Gleichung wird als <u>"Area-Formel"</u> bezeichnet.

® häufig auch als Maßtensor bezeichnet

- Spezialfall: S ist der Graph einer Funktion $\psi: \Omega \to \mathbb{R}$

In diesem Fall hat man die Karte

$$\varphi: \Omega \xrightarrow{\sim} S, \quad \omega \longmapsto (\omega, \psi(\omega))$$

und die Gramsche Determinante reduziert sich auf

$$\sqrt{g_\varphi(\omega)} = \sqrt{1 + |\nabla_\omega \psi(\omega)|^2}$$

(Berechnung der Determinante nicht-trivial, s. Kaballo Bd II)

- Bsp. $S = S^{n-1}_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, \; x_n \gtrless 0\}$,

die nördliche bzw. südliche Hemisphäre. Hierfür wählt man

$$\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < 1\}, \quad \psi_{\pm}(x') = \pm\sqrt{1 - |x'|^2},$$

$$\varphi_{\pm}(x') = (x', \pm\sqrt{1 - |x'|^2})$$

und erhält als Gramsche Determinante (beachte

$$\nabla_{x'} \psi_{\pm}(x') = \frac{\mp x'}{\sqrt{1 - |x'|^2}} \Rightarrow |\nabla_{x'} \psi(x')|^2 = \frac{|x'|^2}{1 - |x'|^2} \; ! \;)$$

$$\sqrt{g_{\varphi_{\pm}}(x')} = \frac{1}{\sqrt{1 - |x'|^2}}$$

Damit hat man als Integral einer integrierbaren Funktion f über die Hemisphären

$$\int_{S^{n-1}_{\pm}} f(x)\, d\sigma(x) = \int_{|x'| < 1} f(x', \pm\sqrt{1 - |x'|^2}) \frac{dx'}{\sqrt{1 - |x'|^2}}$$

Unter Vernachlässigung des Äquators, der in $\mathbb{R}^{n-1}$ Dimensionen noch eine Nullmenge ist, hat man dann als Integral über die $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x) = \int_{|x'|<1} \left(f(x', \sqrt{1-|x'|^2}) + f(x', -\sqrt{1-|x'|^2}) \right) \frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

- Verhalten unter Streckungen: Gegeben seien

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} S, \quad \omega \mapsto \varphi(\omega) \quad (C^1, \text{bijektiv})$$

und für $t > 0$ die Fläche $S_t = tS$. Dann ist

$$\psi : \Omega \xrightarrow{\sim} S_t, \quad \omega \mapsto \psi(\omega) := t\varphi(\omega)$$

eine Karte von S_t mit $D\psi(\omega) = t D\varphi(\omega)$ und daher mit $g_\psi(\omega) = t^2 \cancel{D_\varphi}\, g_\varphi(\omega)$ bzw

$$\sqrt{g_\psi(\omega)} = t^{n-1} \sqrt{g_\varphi(\omega)}.$$

Hieraus ergibt sich (σ_t = Flächenmaß von S_t)

$$\int_{S_t} f(x)\, d\sigma_t(x) = \int_\Omega f(\psi(\omega)) \sqrt{g_\psi(\omega)}\, d\omega$$

$$= t^{n-1} \int_\Omega f(t\varphi(\omega)) \sqrt{g_\varphi(\omega)}\, d\omega$$

$$= t^{n-1} \int_S f(ty)\, d\sigma(y)$$

Flächenmaß von S

Für Sphären vom Radius $t > 0$ erhalten wir also

$$\int\limits_{|x|=t} f(x)\, d\sigma_t(x) = t^{n-1} \int\limits_{|x|=1} f(tx)\, d\sigma(x)$$

- <u>Coarea-Formel</u>: Gegeben sei eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die sich als disjunkte Vereinigung glatter Flächen darstellen läßt

$$\Omega = \bigcup_{\lambda \in I} S_\lambda \,, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall.}$$
$$S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = \lambda\},\ P \in C^\infty \text{ mit } \nabla P(x) \neq 0 \text{ in } \Omega.$$

Dann hat man ein Verallgemeinerung des Satzes von Fubini die folgende Darstellung des Integrals über Ω:

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \int\limits_{I} \int\limits_{S_\lambda} \frac{d\sigma(x)}{|\nabla P(x)|}\, f(x)$$

Bsp. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$

$P(x) = |x|$, $\lambda = r$ $\Rightarrow \nabla P(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow |\nabla P(x)| = 1$

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \int\limits_a^b \int\limits_{r\cdot S^{n-1}} f(x) \frac{d\sigma_r(x)}{|\nabla P(x)|}\, dr$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_{|x|=r} f(x)\, d\sigma_r(x)\, dr$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_{|x|=1} f(rx)\, d\sigma(x)\, r^{n-1} dr$$

Ende des Exkurses!

Bsp. 2.2: Fouriertransformierte des Flächenmaßes der S^{n-1}

O.E. $\xi = (0,\dots,0,|\xi|)$

$$\hat{\sigma}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|=1} e^{-ix\xi}\, d\sigma(x)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|=1} e^{-ix_n|\xi|}\, d\sigma(x)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{|x'|<1} \left(e^{-i\sqrt{1-|x'|^2}\,|\xi|} + e^{i\sqrt{1-|x'|^2}\,|\xi|}\right) \frac{dx'}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_0^1 \int_{|x'|=\varrho} d\sigma_\varrho(x') \cdot e^{-i\sqrt{1-\varrho^2}\,|\xi|} + e^{i\sqrt{1-\varrho^2}\,|\xi|} \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \cdot |\partial S^{n-2}| \cdot \int_0^1 \varrho^{n-2} \left(e^{-i\sqrt{1-\varrho^2}\,|\xi|} + e^{i\sqrt{1-\varrho^2}\,|\xi|}\right) \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

Subst. $\varrho = \sin t$, einmal auf $(0,\frac{\pi}{2})$ ($\Rightarrow \cos t > 0$), zum anderen auf $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ($\Rightarrow \cos(t) < 0$) ergibt

$$= (2\pi)^{-n/2} \underbrace{|\partial S^{n-2}|}_{= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^{2(\frac{n}{2}-1)}(t) \cdot e^{-i\cos(t)|\xi|}\, dt}_{= J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|) \cdot \left(\frac{2}{|\xi|}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|)$$

Folgerungen:

(1) Ist σ_t das Flächenmaß der Sphäre $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$,

so gilt $\hat{\sigma}_t(\xi) = t^{n/2} |\xi|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|)$.

(2) Ist $F(x) = f(|x|)$, $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so gilt

$$\hat{F}(\xi) = |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty f(r) J_{\frac{n}{2}}(r|\xi|) r^{n/2} \, dr$$

Bew.: (1) $$\hat{\sigma}_t(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|=t} e^{-ix\xi} \, d\sigma_t(x)$$

oben über Skalierung $$= t^{n-1} \cdot (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|=1} e^{-itx\xi} \, d\sigma_1(x)$$

$$= t^{n-1} \hat{\sigma}_1(t|\xi|) = t^{n-1} |t\xi|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|)$$

$$= t^{n/2} |\xi|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t|\xi|).$$

(2) $$\hat{F}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(|x|) \, dx$$

Coarea-Formel $$= (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty f(r) \int_{|x|=r} e^{-ix\xi} \, d\sigma_r(x) \, dr$$

$$= \int_0^\infty f(r) \, \hat{\sigma}_r(\xi) \, dr$$

$$\underset{(1)}{=} |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty f(r) J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|) r^{\frac{n}{2}} \, dr.$$