Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
05.06.2023
Blatt 8

ÜBUNGEN ZU FOURIERANALYSIS

15. (6+2 P.) Für $0 < \gamma < 1$ sei $I_\gamma := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\gamma-1}}{1+x} dx$.

(a) Berechnen Sie I_γ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung des Cosecans. (Anleitung: Zerlegen Sie den Integrationsbereich in die Teilintervalle $(0,1)$ und $(1,\infty)$. Verwenden Sie anschließend die geometrische Reihe. Begründen Sie die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, z. B. mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi.)

(b) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $\gamma \in S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

16. (6 P.) Im folgenden soll bewiesen werden, dass die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} : L^1(\mathbb{R}) \to C_{(0)}(\mathbb{R})$$

nicht surjektiv ist. Zeigen Sie dazu:

(a) Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $|\displaystyle\int_a^b \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi| \leq C$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Ist g die Fouriertransformierte von $f \in L^1(\mathbb{R})$ und ist g ungerade, so ist $g(\xi) = -ic_1 \int_{\mathbb{R}} \sin(x\xi) f(x) dx$.

(c) Unter den in (b) genannten Voraussetzungen gilt für jedes $R > 2$:

$$\left| \int_2^R \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq c_1 C \|f\|_1,$$

wobei C die Konstante aus Teil (a) ist.

(d) Eine ungerade stetige Funktion g, die auf $(2,\infty)$ mit $\dfrac{1}{\ln\xi}$ übereinstimmt, ist nicht die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion.

Abgabe: 12.06.2023 (in der Vorlesung)
Besprechung: 19.06.2023