Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
08.05.2023
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU FOURIERANALYSIS

10. (4+3+4+1 P.) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \cos(zx) \qquad \text{für} \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe von f. Beachten Sie dabei, dass f eine gerade Funktion ist, und verwenden Sie Aufgabe 4 sowie das Additionstheorem für den Cosinus.

(b) Begründen Sie, dass die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig gegen f konvergiert. Folgern Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Partialbruchentwicklungen

(i) des Cosecans

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right)$$

(ii) und des Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right).$$

(c) Beweisen Sie für $x \in (0, 1)$ die Produktdarstellung

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

des Sinus, indem Sie die Partialbruchentwicklung des Cotangens von $\varepsilon \in (0, x)$ bis x integrieren.

(d) Folgern Sie die Wallis'sche[1] Produktdarstellung von π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Abgabe: 15.05.2023 (in der Vorlesung)
Besprechung: 22.05.2023

[1] nach John Wallis (1616 - 1703)