Bevor ich zu den Folgerungen aus dem Poisson-Integral komme, möchte ich noch eine alternative Herleitung des Poisson-Kerns für den Einheitskreis geben:

Exkurs: Herleitung des Poisson-Kerns für $B_1(0)\subset\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Fourierreihen

Gegeben sei eine Lösung u des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \text{ in } B_1(0)=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x|<1\},\quad u\big|_{\partial B_1(0)} = g.$$

Wir wollen die Darstellung

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}\,d\varphi$$

beweisen. Zur Vereinfachung von Konvergenzbetrachtungen setzen wir $u\in C^2(\overline{B_1(0)})$, also auch $g\in C^2(\partial B_1(0))$ voraus. Um in Polarkoordinaten

$$x=(x_1,x_2) = (\cos\varphi,\sin\varphi) = e^{i\varphi}\in\partial B_1(0) \qquad \text{bzw.}$$

$$y=(y_1,y_2) = r(\cos\vartheta,\sin\vartheta) = r\cdot e^{i\vartheta}\in B_1(0)$$

rechnen zu können, definieren wir h und v durch

$$h(\varphi) = g(x_1,x_2) = g(\cos\varphi,\sin\varphi) \quad \rightsquigarrow h\in C^2([-\pi,\pi])$$

$$v(r,\vartheta) = u(y_1,y_2) = u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta).$$

Bei festem $r\in[0,1]$ ist dann

$$v(r,\cdot): \vartheta \to v(r,\vartheta)$$

eine 2π-periodische, zweimal stetig diff'bare Funktion, die wir in eine trigonometrische Reihe

$$v(r,\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(r)\cdot e^{ik\vartheta}$$

entwickeln können. (Die Voraussetzung $v\in C^2$ sichert die gleichmäßige Konvergenz der Reihe, sofern die $a_k(r)$ richtig gewählt werden. Ferner kann man Differentiation und Summation vertauschen. Das ist nicht offensichtlich, sei aber hier als Tatsache hingenommen.) Entsprechendes gilt für h:

$$h(\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(k) e^{ik\vartheta}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta) e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta.$$

Die Randbedingung $u\big|_{\partial B_1(0)} = g$ wird zu

$$v(1,\vartheta) = h(\vartheta).$$

Den Laplace-Operator Δ_ϕ in ebenen Polarkoordinaten, definiert durch

$$\Delta_\phi v(r,\vartheta) = \Delta u(x_1,x_2),$$

haben wir in Aufg. 3 von Blatt 1 bestimmt zu

$$\Delta_\phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Jetzt bestimmen wir die Koeffizienten $a_k(r)$ in unserem Reihenansatz für v der Dgl.

$$0 = \Delta_\phi\, a_k(r)\cdot e^{ik\vartheta} = \left(a_k''(r) + \frac{1}{r}a_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}a_k(r)\right)\cdot e^{ik\vartheta}$$

genügen, wir gelangen also zur gewöhnlichen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$a_k''(r) + \frac{1}{r}a_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}a_k(r) = 0,$$

für die wir mit dem Ansatz $a_k(r) = r^\lambda$ die allgemeinen Lösungen

$$a_k(r) = A_k r^{|k|} + B_k r^{-|k|} \qquad (k \neq 0) \qquad \text{und}$$

$$a_0(r) = A_0 + B_0 \cdot \ln(r)$$

erhalten. Da wir eine stetige und also beschränkte Lösung v suchen, sind die singulären Beiträge auszuschließen, d. h. wir haben $B_k = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Damit ist die Reihendarstellung von v spezifiziert zu

$$v(r,\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k \cdot r^{|k|} \cdot e^{ik\vartheta}$$

mit reellen Koeffizienten A_k. Zu deren Bestimmung ziehen wir die Randbedingung heran:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k \cdot e^{ik\vartheta} = v(1,\vartheta) = h(\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(k)\, e^{ik\vartheta},$$

wegen der Orthogonalität der $(e^{ik\cdot})_{k\in\mathbb{Z}}$ also

$$A_k = \hat{h}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\vartheta)e^{-ik\vartheta}d\vartheta.$$

Damit: Für $0\leq r\leq 1$

$$V(r,\vartheta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{h}(k)e^{ik\vartheta} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{ik(\vartheta-t)}dt$$

$$\overset{\text{glm. konv.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\vartheta-t)}\,dt.$$

Die Reihe im Integral ist elementar summierbar, da es sich um zwei geometrische Reihen handelt. Mit $w = r\cdot e^{i(\vartheta-t)}$ haben wir für $0\leq r<1$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik(\vartheta-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{w}^k = \frac{1}{1-w} + \frac{\overline{w}}{1-\overline{w}}$$

$$= \frac{1-\overline{w}+\overline{w}-|w|^2}{(1-w)(1-\overline{w})} = \frac{1-|w|^2}{1-2\operatorname{Re}w+|w|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\vartheta)+r^2}$$

und damit insgesamt (mit φ statt t)

$$u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = V(r,\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{h(\varphi)}_{=g(e^{i\varphi})}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}\,d\varphi$$

in Übereinstimmung mit unserem früheren (allgemeineren) Resultat!