4.4 Die Abstiegsmethode nach Hadamard

Die grundlegende Idee ist einfach: Man sucht eine Integraldarstellung für Lösungen

$$v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x,t) \longmapsto v(x,t)$$

der Wellengleichung in geraden Raumdimensionen n. Dazu faßt man v als Funktion von n+1 Raumvariablen $x_1, \dots, x_{n+1}$ auf, genauer: Man definiert

$$u(x, x_{n+1}, t) := v(x,t) \qquad (x = (x_1, \dots, x_n)),$$

und da u von x_{n+1} gar nicht wirklich abhängt, hat man $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} = 0$ und somit eine Lösung der Wellengleichung in n+1 Raumdimensionen. Da n+1 ungerade ist, steht nach Abschnitt 4.3 für u eine Integraldarstellung zur Verfügung, die wegen der Unabhängigkeit von x_{n+1} noch etwas vereinfacht werden kann. Eine Verfeinerung des Arguments erlaubt es, auch die Klein-Gordon-Gleichung in geraden Raumdimensionen zu behandeln. Um den Dimensionsauf- und -abstieg besser behandeln zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein:

- $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$
- $\Delta_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n + \dfrac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$; $\Box_n = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n$.

Lemma 1: (a) Sei $v \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$(\Box_n + m^2)\, v(x,t) = 0; \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x) \qquad (1)$$

und $u(x, x_{n+1}, t) = e^{imx_{n+1}} v(x,t)$. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_x \times \mathbb{R}_t)$ und löst das Problem

$$\left.\begin{aligned} &\Box_{n+1} u(x, x_{n+1}, t) = 0, \quad u(x, x_{n+1}, 0) = e^{imx_{n+1}} v_0(x) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x, x_{n+1}, 0) = e^{imx_{n+1}} v_1(x). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(b) Es seien $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_x \times \mathbb{R}_t)$ eine Lösung von (2) und $v(x,t) = e^{-imx_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)$ unabhängig von x_{n+1}, so ist $v \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ und löst (1).

Bem.: (1) In (b) muss die Unabhängigkeit von x_{n+1} noch vorausgesetzt werden. Sie wird sich später aus einer Rechnung ergeben.

(2) Der Fall $m = 0$ entspricht der klassischen Wellengleichung und ist hier zugelassen.

(3) Ebenfalls zugelassen sind hier alle $n \in \mathbb{N}$. Das Lemma kann also auch für einen Abstieg von gerader nach ungerader Raumdimension verwendet werden.

Bew.: Regularität und Anfangswerte sind in beiden Fällen klar. Zur Dgl.:

(a) $$\Box_{n+1} u(x, x_{n+1}, t) = \left(\Box_n - \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}\right) e^{i m x_{n+1}} v(x,t)$$

$$= e^{i m x_{n+1}} \Box_n v(x,t) + m^2 \cdot e^{i m x_{n+1}} v(x,t)$$

$$= e^{i m x_{n+1}} (\Box_n + m^2) v(x,t) = 0.$$

(b) Da wir v als unabhängig von x_{n+1} vorausgesetzt haben, gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)$$

$$= -im \cdot e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t) + e^{-i m x_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)$$

und

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t) = -m^2 e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)$$

$$+ 2(-im) \cdot \underbrace{e^{-i m x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}(x, x_{n+1}, t)}_{= im\, e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)} + e^{-i m x_{n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} u(x, x_{n+1}, t)$$

$$= m^2 \cdot e^{-i m x_{n+1}} \cdot u(x, x_{n+1}, t) + e^{-i m x_{n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} u(x, x_{n+1}, t)$$

$$\rightsquigarrow (\Box_n + m^2) v(x,t) = (\Box_n + m^2) e^{-i m x_{n+1}} u(x, x_{n+1}, t)$$

$$= e^{-i m x_{n+1}} \left(\Box_{n+1} + m^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}\right) u(x, x_{n+1}, t)$$

$$= e^{-i m x_{n+1}} \left(m^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}\right) u(x, x_{n+1}, t) = 0. \qquad \Box$$

Satz 1: Es seien $n \geq 2$ gerade, $v_0 \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $v_1 \in C^{\frac{n+2}{2}}$. Dann wird das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box_n + m^2)\, v(x,t) = 0; \qquad v(x,0) = v_0(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x)$$

eindeutig gelöst durch

$$v(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos\left(m\sqrt{t^2-s^2}\right) M(x,s;v_0)\,ds \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos\left(m\sqrt{t^2-s^2}\right) M(x,s;v_1)\,ds \right\}.$$

Bew.: Zur Abkürzung schreiben wir $\bar{x} = (x, x_{n+1})$, $\bar{\xi} = (\xi, \xi_{n+1})$, ...

Sei u die Lösung von $\Box_{n+1} u(\bar{x},t) = 0$ mit Daten

$$u(\bar{x},0) = e^{i m x_{n+1}} v_0(x) =: u_0(\bar{x}) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},0) = e^{i m x_{n+1}} v_1(x) =: u_1(\bar{x}).$$

Nach Satz 3 aus Abschnitt 4.3 ist dann

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{(n-1)!!}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} M(\bar{x},t;u_0) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} M(\bar{x},t;u_1) \right\},$$

wobei in der Formel aus Satz 3 überall n durch $n+1$ ersetzt werde und M jetzt den sphärischen Mittelwert in $n+1$ Raumdimensionen bedeutet. Hierfür ergibt sich:

$$M(\bar{x},t;u_i) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \int_{|\bar{\xi}|=1} u_i(\bar{x}+t\bar{\xi})\, dS_{\bar{\xi}}$$

$$= \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{|\bar{\xi}|=1} v_i(x+t\xi)\, e^{in(x_{n+1}+t\xi_{n+1})}\, dS_{\bar{\xi}}$$

$$= \frac{e^{inx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_{|\xi|<1} v_i(x+t\xi)\cdot\left(e^{int\sqrt{1-|\xi|^2}} + e^{-int\sqrt{1-|\xi|^2}}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$$

$$= \frac{2\cdot e^{inx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 \int_{|\xi|=\varrho} v_i(x+t\xi)\, dS_\xi \, \cos(nt\sqrt{1-\varrho^2})\frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

Wir setzen $\xi = \varrho\eta$, so dass $dS_\xi = \varrho^{n-1} dS_\eta$, und erhalten

$$\ldots = \frac{2e^{inx_{n+1}}}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 \underbrace{\int_{|\eta|=1} v_i(x+t\cdot\varrho\eta)\, dS_\eta}_{= M(x,t\varrho;v_i)\cdot\omega_n} \cos(nt\sqrt{1-\varrho^2})\frac{\varrho^{n-1}\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

$$= e^{inx_{n+1}} \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} \cdot \int_0^1 M(x,t\varrho;v_i)\cos(nt\sqrt{1-\varrho^2})\frac{\varrho^{n-1}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho$$

und schließlich ergibt die Substitution $s = t\varrho$

$$d\varrho = \frac{ds}{t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varrho^{n-1}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho = \frac{1}{t^{n-1}} \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}}\, ds,$$

also

$$\ldots = e^{inx_{n+1}} \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} \cdot \int_0^t M(x,s;v_i)\cos(n\sqrt{t^2-s^2})\frac{s^{n-1}\, ds}{\sqrt{t^2-s^2}}.$$

Setzen wir das oben ein, so kürzen sich gerade die Faktoren t^{n-1} und $\frac{1}{t^{n-1}}$; die absolute Konstante wird zu

$$\frac{1}{(n-1)!!}\cdot\frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}}=\frac{1}{(n-2)!!}$$ (elementare Rechnung)

und wir kommen an bei

$$u(\bar{x},t)=\frac{e^{imx_{n+1}}}{(n-2)!!}\cdot\{\ \}$$ mit

$$\{\ \}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\int_0^t\frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}}\cos(m\sqrt{t^2-s^2})\,M(x,s;v_0)\,ds$$

$$+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\int_0^t\qquad\sim\qquad M(x,s;v_1)\,ds$$

Wir stellen fest, dass $v(x,t)=e^{-imx_{n+1}}u(\bar{x},t)$ tatsächlich nicht von x_{n+1} abhängt. Lemma 1 (b) ergibt, dass v (wie in der Fel. des Satzes angegeben) das Cauchy-Problem für die KGG löst. $\square$

Für $m=0$ (so dass $\cos(m\sqrt{t^2-s^2})=1$), also die klassische Wellengleichung, ist die im Satz 1 angegebene Darstellung Lehrbuchstandard, z. B. zu finden bei Evans oder Sauvigny. Die Idee für die Verallgemeinerung auf $m\neq 0$ habe ich dem Klassiker "Methoden der Mathematischen Physik" von Courant und Hilbert entnommen.[1)] Dort wird allerdings die Gleichung

1) 2. Auflage, 1968; Kap. 6, S. 408 ff. (Zweiter Band)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - m^2 u = 0 \quad (\text{anderes Vorzeichen von } m^2!)$$

betrachtet. Hierfür kann man in Satz 1 m durch im und dementsprechend den Faktor $\cos(m\sqrt{t^2-s^2})$ durch $\cosh(m\sqrt{t^2-s^2})$ ersetzen.

Aus zwei Gründen ist es sinnvoll, die Integrale in Satz 1 in Volumenintegrale umzuschreiben: Zum einen erkennt man dann (besser) die Faltungsstruktur der Lösung. Zum anderen kann man damit besser weiterrechnen.

Folgerung aus Satz 1: Für $t > 0$ sei

$$k_t(\xi) := \chi_{B_t(0)}(\xi)\,\frac{\cos(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen des Satzes

$$v(x,t) = \frac{1}{\omega_n (n-2)!!}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} k_t * v_0(x) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} k_t * v_1(x)\right\}.$$

Bew.: Wir schreiben $M(x,s;v_i) = \frac{1}{\omega_n s^{n-1}} \int\limits_{|\xi|=s} v(x-\xi)\, dS_\xi$.

Dann wird

$$\int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}} \cos(m\sqrt{t^2-s^2})\, M(x,s;v_i)\, ds$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_0^t \frac{\cos(m\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}} \int\limits_{|\xi|=s} v_i(x-\xi)\, dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \int_{|\xi|=s} v_i(x-\xi) \frac{\cos(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}} \, dS_\xi \, ds$$

jetzt: Polarkoordinaten!

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|<t} v_i(x-\xi) \cdot \quad " \quad d\xi = \frac{1}{\omega_n} \cdot K_t * v_i(x).$$

Nun können wir durch einen weiteren Dimensionsabstieg auch das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon-Gleichung in ungeraden Raumdimensionen lösen:

Satz 2: Es seien $n \geq 1$ ungerade, $v_0 \in C^{\frac{n+5}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $v_1 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die eindeutige Lösung des Cauchy-Problems

$$(\Box_n + m^2) v(x,t) = 0; \qquad v(x,0) = v_0(x), \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x)$$

gegeben durch

$$v(x,t) = \frac{\pi}{\omega_{n+1}(n-1)!!} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi|<t} v_0(x+\xi) J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}) \, d\xi$$

$$+ \Big(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi|<t} v_1(x+\xi) J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}) \, d\xi \Big\}$$

Hierbei ist $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-ix\cos(t)} dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{ixz}}{\sqrt{1-z^2}} dz$ die Besselfunktion der Ordnung $p=0$.

Bem.: Die Identität $(*)$ ergibt sich aus der Substitution $z = -\cos(t) \rightsquigarrow dz = \sin(t)\, dt = \sqrt{1-z^2}\, dt$.

Bew.: Für die Lösung $u: \mathbb{R}^{n+1}_x \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{C}$ von

$\Box_{n+1} u(\bar{x}, t) = 0$ mit Daten

$$u(\bar{x}, 0) = e^{imx_{n+1}} \cdot v_0(x) =: u_0(\bar{x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, 0) = e^{imx_{n+1}} v_1(x) =: u_1(\bar{x})$$

gilt nach der Folgerung aus Satz 1 (mit $m = 0$ und $n+1$ anstelle von n)

$$u(\bar{x}, t) = \frac{1}{\omega_{n+1}(n-1)!!} \cdot \{\ \} \quad \text{mit}$$

$$\{\ \} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{|\bar{\xi}| < t} u_0(\bar{\xi} + \bar{x}) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{t^2 - |\bar{\xi}|^2}}$$

$$+ \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{|\bar{\xi}| < t} u_1(\bar{x} + \bar{\xi}) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{t^2 - |\bar{\xi}|^2}} .$$

Dabei ist

$$\int\limits_{|\bar{\xi}| < t} u_i(\bar{x} + \bar{\xi}) \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{t^2 - |\bar{\xi}|^2}}$$

$$= e^{imx_{n+1}} \int\limits_{|\bar{\xi}| < t} v_i(x + \xi) e^{im\xi_{n+1}} (t^2 - |\xi|^2 - \xi_{n+1}^2)^{-\frac{1}{2}} d\bar{\xi}$$

$$= e^{imx_{n+1}} \int\limits_{|\xi| < t} v_i(x + \xi) \Big(\int\limits_{\xi_{n+1}^2 < t^2 - |\xi|^2} e^{im\xi_{n+1}} (t^2 - |\xi|^2 - \xi_{n+1}^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi_{n+1} \Big) d\xi$$

Um das innere Integral vereinfachen zu können, schreiben wir $t^2 - |\xi|^2 - \xi_{n+1}^2 = (t^2 - |\xi|^2)\left(1 - \frac{\xi_{n+1}^2}{t^2 - |\xi|^2}\right)$

und substituieren

$$z = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}, \quad \text{so dass} \quad d\xi_{n+1} = \sqrt{t^2-|\xi|^2}\, dz .$$

Damit wird

$$\int_{\xi_{n+1}^2 < t^2-|\xi|^2} e^{im\xi_{n+1}} \left(t^2-|\xi|^2-\xi_{n+1}^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi_{n+1}$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{im\sqrt{t^2-|\xi|^2}\, z} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi \cdot J_0\left(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}\right),$$

so dass

$$\int_{|\bar\xi|<t} u_i(\bar x+\bar\xi)\frac{d\bar\xi}{\sqrt{t^2-|\bar\xi|^2}}$$

$$= e^{imx_{n+1}} \cdot \int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi)\cdot \pi\, J_0\left(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}\right) d\xi .$$

Einsetzen zeigt: $e^{-imx_{n+1}}u(\bar x,t) =: v(x,t)$ ist unabhängig von x_{n+1}, löst also nach Lemma 1 (b) tatsächlich die Klein-Gordon-Gleichung mit Anfangswerten v_0 bzw. v_1. □

Wir sollten noch einen Schritt weiterrechnen, um einzusehen, dass

- die Regularitätsvoraussetzung für klassische Lösungen auf $v_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $v_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ abgeschwächt werden können und

• unser Ergebnis für $m=0$ in die bekannte Integraldarstellung der Lösungen der klassischen Wellengleichung übergeht.

<u>1. Fall: $n=1$:</u> Wir bemerken $J_0(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dt = 1$ und die Identität $J_0'(x) = -J_1(x)$ (das ist ein Spezialfall der Rekursionsformel von Blatt 2) und die Tatsache, dass $\lim_{z\to 0} \frac{J_1(z)}{z} = J_1'(0)$ existiert. Damit ist nach Satz 2

$$v(x,t) = \frac{\pi}{\omega_2}\Big\{ \frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t} v_0(x+\xi)\cdot J_0(m\sqrt{t^2-\xi^2})\,d\xi$$

$$+ \int_{-t}^{t} v_1(x+\xi)\, J_0(m\sqrt{t^2-\xi^2})\,d\xi \Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ v_0(x+t) + v_0(x-t) + \int_{-t}^{t} v_0(x+\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial t} J_0(m\sqrt{t^2-\xi^2})\,d\xi$$

$$+ \int_{-t}^{t} v_1(x+\xi)\, J_0(\dots)\,d\xi \Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ v_0(x+t) + v_0(x-t) + \underbrace{\int_{-t}^{t} v_1(x+\xi)\, J_0(m\sqrt{t^2-\xi^2})\,d\xi}_{=:\, I_2(x,t)} \Big\}$$

$$- \underbrace{\frac{mt}{2}\int_{-t}^{t} v_0(x+\xi)\,\frac{J_1(m\sqrt{t^2-\xi^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,d\xi}_{=:\, I_1(x,t)}$$

Wegen $J_0(0)=1$ stimmt dies für $m=0$ mit der d'Alembert-Formel überein. Nehmen wir $v_0 \in C^2(\mathbb{R})$ an, so ist klar, dass $v_0(x\pm t)$ zweimal stetig nach x und t diffbar sind. Ebenso ist I_1 zweimal stetig nach x diffbar. Schreiben wir ($\xi = ty$, $d\xi = t\,dy$)

$$I_1(x,t) = \int_{-1}^{1} v_0(x+ty)\,\frac{J_1(m t\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

so erweisen sich auch zwei t-Ableitungen als problemlos.

Für $I_2(x,t)$ setzen wir lediglich $v_1 \in C^1(\mathbb{R})$ voraus.

Dann ist

$$\frac{\partial I_2}{\partial t}(x,t) = v_1(x+t) + v_1(x-t) - m t \int_{-t}^{t} v_1(x+\xi)\,\frac{J_1(m\sqrt{t^2-\xi^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,d\xi$$

und nach der Diskussion zu I_1 ist klar, dass dies ein weiteres Mal stetig nach x und t abgeleitet werden. Für die Differenzierbarkeit nach x schreiben wir

$$I_2(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} v_1(\xi)\,J_0\left(m\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\right)d\xi.$$

Dann ist

$$\frac{\partial I_2}{\partial x}(x,t) = v_1(x+t) - v_1(x-t) - m\int_{x-t}^{x+t} v_1(\xi)\,\frac{J_1\left(m\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\right)(\xi-x)}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}\,d\xi$$

$$= v_1(x+t) - v_1(x-t) - m\int_{-t}^{t} v_1(x+\xi)\,\frac{J_1(m\sqrt{t^2-\xi^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,\xi\,d\xi,$$

was fast dasselbe ist wie $\frac{\partial I_2}{\partial t}(x,t)$.

2. Fall: $n \geq 3$: Hier schreiben wir

$$\int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi)\, J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})\, d\xi$$

$$= \int_0^t \int_{|\xi|=s} v_i(x+\xi)\, dS_\xi \; J_0(m\sqrt{t^2-s^2})\, ds ,$$

so dass wir explizit nach t ableiten können. Mit $J_0(0)=1$ und $J_0' = -J_1$ ergibt sich

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi)\, J_0(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})\, d\xi$$

$$= \frac{1}{t}\int_{|\xi|=t} v_i(x+\xi)\, dS_\xi - m \cdot \int_0^t \int_{|\xi|=s} v_i(x+\xi)\, dS_\xi \, \frac{J_1(m\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}}\, ds$$

$$= t^{n-2}\omega_n \cdot M(x,t;v_i) - m \cdot \int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi)\, \frac{J_1(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}\, d\xi ,$$

was wir in die Darstellung von v aus Satz 2 einsetzen können. Mit

$$\frac{\pi \cdot \omega_n}{\omega_{n+1}(n-1)!!} = \frac{1}{(n-2)!!}$$ ergibt sich

$$v(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;v_0) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} M(x,t;v_1)\right\}$$

$$- \frac{m\pi}{\omega_{n+1}(n-1)!!}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_{|\xi|<t} v_0(x+\xi)\, \frac{J_1(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}\, d\xi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \int_{|\xi|<t} v_1(x+\xi)\, \frac{J_1(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}\, d\xi \right\}$$

Für $m=0$ fällt der zweite Teil weg und wir sind wieder bei der Lösungsformel für die klassische Wellengleichung angekommen. Die darin enthaltenen Beiträge liegen in $C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$, wenn

$$v_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n) \quad , \; v_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{gelten.}$$

Die Volumenintegrale mit J_1 schreiben wir um zu

$$\int_{|\xi|<t} v_i(x+\xi)\,\frac{J_1(m\sqrt{t^2-|\xi|^2})}{\sqrt{t^2-|\xi|^2}}\,d\xi = t^{n-1}\cdot\int_{|\xi|<1} v_i(x+t\xi)\,\frac{J_1(mt\sqrt{1-|\xi|^2})}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\,d\xi .$$

Hieraus können wir erkennen, dass diese ebensooft stetig diffbar sind wie die v_i, d.h. es gilt

$$v_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n),\, v_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow v \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$$

Der Satz 2 kann dann entsprechend umformuliert werden.

Schließlich können wir noch eine Integraldarstellung der Lösungen des Cauchy-Problems $\Psi(x,0)=\Psi_0(x)$ für die freie Dirac-Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) + H_1\Psi(x,t) = 0 \qquad H_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + im\beta$$

als "by product" entnehmen. Aus Lemma 1 in Abschnitt 4.1 wissen wir:

Genau dann ist $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung dieses Problems, wenn Ψ das Cauchy-Problem

$$\Psi(x,0) = \Psi_0(x) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = -H_1\Psi_0(x)$$

für die (vektorwertige) Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\,\psi(x,t) = 0$$

löst. Damit ergeben sich zwei Folgerungen aus den Sätzen 1 bzw. 2:

Folgerung 1: Es sei $n \geq 2$ gerade und $\psi_0 \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$. Dann wird das Cauchy-Problem für die freie Dirac-Gleichung eindeutig gelöst durch

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} I(x,t;\psi_0) \quad \text{mit}$$

$$I(x,t;\psi_0) = \int_0^t \frac{s^{n-1}}{\sqrt{t^2-s^2}}\cos\left(m\sqrt{t^2-s^2}\right) M(x,s;\psi_0)\,ds.$$

(Die hierin enthaltenen vektorwertigen Integrale sind komponentenweise aufzufassen.)

Folgerung 2: Es sei $n \geq 1$ ungerade und $\psi_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$. Dann wird das Cauchy-Problem für die freie Dirac-Gleichung eindeutig gelöst durch

$$\psi(x,t) = \frac{\pi}{\omega_{n+1}(n-1)!!}\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot J(x,t;\psi_0),$$

$$J(x,t;\psi_0) = \int_{|\xi|<t} \psi_0(x+\xi)\, J_0\left(m\sqrt{t^2-|\xi|^2}\right) d\xi.$$

(Für $n \geq 3$ kann man die Darst. auf S. 218 heranziehen. Diese leitet Thaller für $n=3$ mit Fouriermethoden unter der Voraussetzung $\psi_0 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^3))^4$ her. $2\frac{1}{2}$ Seiten Rechnung.)