4.3 Die klassische Wellengleichung in ungeraden Raumdimensionen

In diesem Abschnitt sollen Integraldarstellungen für die nach 4.2 eindeutig bestimmten Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ des Cauchy-Problems

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

für die homogene Wellengleichung

$$\Box u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0$$

in ungeraden Raumdimensionen hergeleitet werden. Die Regularitätsanforderungen an die Daten (u_0, u_1) werden sich im Lauf der Rechnung ergeben; sie sind abhängig von der Raumdimension.

- Für $n = 1$ haben Sie hier freundlicherweise die Arbeit schon abgenommen und in den Übungen die

Lösungsformel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+t) + u_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)\,d\xi\Big)$$

gezeigt, wobei man für klassische Lösungen $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ voraussetzen muss. Sie beschreibt die Überlagerung von zwei Transportvorgängen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung und gleichem Betrag der Geschwindigkeiten.

- In höheren Raumdimensionen haben wir eine Überlagerung von Transportvorgängen in alle Raumrichtungen, was mit einem zeitlichen Abfall von $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty_x}$ verbunden ist. In ungeraden Dimensionen spielen die sphärischen Mittelwerte

$$M(x,t;f) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\, dS_\xi \qquad (f \in C(\mathbb{R}^n))$$

eine wesentliche Rolle. Hierbei sind

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$ die Oberfläche der n-dim. Einheitskugel

und – für eine stetige Funktion g –

$$\int_{|\xi|=1} g(\xi)\, dS_\xi = \int_{|\xi'|<1} \left(g(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2}) + g(\xi', -\sqrt{1-|\xi'|^2}) \right) \frac{d\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}$$

mit $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, der Faktor $(1-|\xi'|^2)^{-\frac{1}{2}}$ rührt von der Gram'schen Determinante her, vgl. Abschnitt 1.4.
Erinnert sei an die folgenden

- <u>Eigenschaften der sphärischen Mittelwerte:</u>

(1) Für $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ist $M(\cdot,\cdot;f) \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$
(Differentiation unter dem Integral ist "erlaubt", da der Integrationsbereich kompakt ist.)

(2) $$M(x,0;f) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} f(x)\, dS_\xi = f(x)$$

(3) $$M(x,-t;f)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x-t\xi)\,dS_\xi$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\cdot\int_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\,dS_\xi = M(x,t;f),$$

denn das Flächenmaß der S^{n-1} ist invariant unter der Transformation $\xi \longmapsto -\xi$. Ist $f\in C^1(\mathbb{R})$, so folgt also $\frac{\partial}{\partial t}M(x,0;f)=0$, denn die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade.

(4) Durch Reskalierung um einen Faktor $t\neq 0$ und Verschiebung um $x\in\mathbb{R}^n$ ergibt sich

$$M(x,t;f)=\frac{1}{\omega_n|t|^{n-1}}\int_{|y|=|t|} f(x+y)\,dS_y=\frac{1}{\omega_n|t|^{n-1}}\int_{|x-y|=|t|} f(y)\,dS_y .$$

(5) Ist $f\in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $v(x,t):=M(x,t;f)$, so löst v für $t\neq 0$ die <u>Darbouxsche Dgl.</u>

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\right)v(x,t)=0 .$$

(Satz 1 in Abschnitt 1.4). Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes in 4.2 sind Lösungen v dieser Gleichung durch Vorgabe von $v(x,0)$ und $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)$ eindeutig festgelegt.

- $n=3$. Steht die Darboux-Gleichung für die sphärischen Mittelwerte zur Verfügung, so ist die Lösung der homogenen linearen Wellengleichung in drei Raumdimensionen nicht mehr sonderlich schwierig:

Man setzt für $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$

$$v_1(x,t) := t\,M(x,t;u_1).$$

Dann ist $v_1(x,0)=0$ und

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = M(x,t;u_1) + t\,\frac{\partial M}{\partial t}(x,t;u_1),$$

insbesondere $\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,0)=u_1(x)$. Weiter ist

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial t}M(x,t;u_1) + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(x,t;u_1)$$

$$= t\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)M(x,t;u_1) \overset{\text{Darboux}}{=} t\,\Delta_x M(x,t;u_1) = t\,\Delta_x v_1(x,t).$$

Also ist v_1 eine Lösung von $\Box v_1 = 0$ und ebenso, falls $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ist,

$$v_0(x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\big(t\,M(x,t;u_0)\big)$$

mit $v_0(x,0) = M(x,0;u_0) = u_0(x)$ und

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(t\,M(x,t;u_0)\big)\Big|_{t=0} \overset{\text{s.o.}}{=} t\,\Delta M(x,t;u_0)\Big|_{t=0} = 0.$$

Also ist $u(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t)$ die gesuchte Lösung, und wir haben ~~also~~ damit gezeigt:

Satz 1 (Kirchhoffsche Formel): Es seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die klassische Lösung von

$$\Box u(x,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(t\, M(x,t;u_0)) + t\, M(x,t;u_1) \ .$$

Bem.: (1) Das starke Huygenssche Prinzip: Der Wert $u(x_0,t_0)$ hängt nur von den Werten der Daten (u_0,u_1) auf dem Rand $\partial B_{t_0}(x_0)$ ab. Wir werden sehen, dass dies für die klassische Wellengleichung auch in höheren ungeraden Raumdimensionen in dieser starken Form gilt (ebenso für die masselose Dirac-Gleichung). Das Huygenssche Prinzip in seiner starken Form geht jedoch verloren

- beim Übergang von der Wellen- zur Klein-Gordon-Gleichung (oder zur massiven Dirac-Gleichung) und
- für die Wellengleichung selbst in geraden Raumdimensionen. (Die Bewohner/innen von "Flatland"[1] müssten also mit ganz anderen Sinnesorganen ausgestattet sein als wir.)

---

1) Novelle von Edwin Abott Abott (Pseudonym: A. Square), 1884

(2) Zeitlicher Abfall: Betrachten wir der Einfachheit halber den Fall $u_0 \equiv 0$, $u_1 \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, also die Lösung

$$u(x,t) = t\,M(x,t;u_1)$$

$$= \frac{t}{\omega_3}\cdot\int_{|\xi|=1} u_1(x+t\xi)\,dS_\xi = \frac{t}{4\pi}\cdot\int_{|\xi|=1}\langle \xi\, u_1(x+t\xi), \nu_\xi\rangle\, dS_\xi$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} \frac{t}{4\pi}\cdot\int_{|\xi|<1} \operatorname{div}_\xi(\xi\, u_1(x+t\xi))\,d^3\xi \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{div}_\xi(\xi\cdot u_1(x+t\xi)) = 3u_1(x+t\xi) + \langle \xi, \nabla_\xi u_1(x+t\xi)\cdot t\rangle$$

Also mit $\eta = t\xi \Rightarrow d\eta = t^3 d\xi$, wobei o.E. $t>0$ angenommen sei, die Abschätzung

$$|u(x,t)| \lesssim \frac{1}{t^2}\int_{|\eta|<t}|u_1(x+\eta)|\,d\eta + \frac{1}{t}\int_{|\eta|<t}|\nabla u_1(x+\eta)|\,d\eta$$

$$\lesssim \frac{1}{t}\left(\|u_1\|_{L^{3/2}} + \|\nabla u_1\|_{L^1}\right),$$

wobei für den ersten Teil die Höldersche Ungleichung $\|\varphi\psi\| \le \|\varphi\|_{L^3}\|\psi\|_{L^{3/2}}$ mit $\varphi\equiv 1$ verwendet wurde.

Also haben wir einen zeitlichen Abfall von $|t|^{-1}$ der L^∞_x-Norm. Das geht auch in beliebigen Raumdimensionen (ist aber schwieriger zu zeigen!), wenn die Daten ausreichend glatt sind. Allgemein kann man erreichen, dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty_x} \le C(u_0,u_1)\cdot|t|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

(3) Rotationssymmetrische Daten: Für die Daten $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ sei angenommen, dass

$$u_0(x) = u_0(Ox) \quad \text{und} \quad u_1(x) = u_1(Ox)$$

für jede orthogonale Transformation O des $\mathbb{R}^3$. Dann sind die Funktionen

$$v_0(\pm|x|) := u_0(x) \quad \text{und} \quad v_1(\pm|x|) := u_1(x)$$

wohldefiniert, gerade und es gilt $v_0 \in C^3(\mathbb{R})$ sowie $v_1 \in C^2(\mathbb{R})$. Ist nun u die Lösung von

$$\Box u(x,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),$$

so ist u ebenfalls rotationssymmetrisch.

Begründung: Sei $\tilde{u}(x,t) = u(Ox,t)$ für eine beliebige orthogonale Matrix O. Dann löst $\tilde{u}$ aufgrund der Lorentz-Invarianz ebenfalls die Wellengleichung, und es gelten

$$\tilde{u}(x,0) = u(Ox,0) = u_0(Ox) \overset{\text{Vor.}}{=} u_0(x)$$

und ebenso $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$. Der Eindeutigkeitssatz liefert $u(Ox,t) = u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^{3+1}$.

Jetzt definieren wir $v(|x|,t) := u(x,t)$. Dann löst v (mit $r := |x|$) die Dgl.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r,t) - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t) = 0 .$$

Mit $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ also, nach Multipli-

Koordinaten mit r:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} r v(r,t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r v(r,t).$$

D.h. die Funktion $w(r,t) := r \cdot v(r,t)$ löst die eindim. Wellengleichung mit Anfangswerten

$$w(r,0) = r \cdot v_0(r), \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(r,0) = r \cdot v_1(r).$$

Die d'Alembert-Formel ergibt (mit r statt x)

$$w(r,t) = \frac{1}{2}\Big((r+t)v_0(r+t) + (r-t)v_0(r-t) + \int_{r-t}^{r+t} \xi v_1(\xi)\,d\xi\Big)$$

bzw. für ~~$\Rightarrow 0$~~ $|x| = r > 0$

$$v(r,t) = u(x,t) = \frac{1}{2r}\cdot\Big((r+t)v_0(r+t) + (r-t)v_0(r-t) + \int_{r-t}^{r+t} \xi v_1(\xi)\,d\xi\Big).$$

——— Ende der Diskussion zu $n=3$ ———

- Zur Verallgemeinerung auf höhere ungerade Raumdimensionen bedarf es einiger Vorbereitungen:

<u>Mittelwertsatz von Asgeirsson:</u> Es sei $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto u(x,y)$ in $C^2(\mathbb{R}^{2n})$ eine Lösung der (ultrahyperbolischen) Dgl. $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$. Dann gilt für alle $(x,y,t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, dass

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(x+t\xi, y)\,dS_\xi = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(x, y+t\xi)\,dS_\xi$$

(Hierbei sind $\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ und $\Delta_y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$.)

Bew.: Wir nehmen o.E. $t>0$ an und definieren

$$\mu(x,y,t) := \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x+t\xi, y)\, dS_\xi$$

und

$$\nu(x,y,t) := \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x, y+t\xi)\, dS_\xi .$$

Dann gilt aufgrund der Eigenschaften der sphärischen Mittelwerte

$$\mu(x,y,0) = \nu(x,y,0) = u(x,y) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,y,0) = \frac{\partial \nu}{\partial t}(x,y,0) = 0 .$$

Ferner haben wir nach dem Satz über die Darbouxsche Dgl.

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}(x,y,t) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,y,t) - \Delta_x \mu(x,y,t) = 0$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}(x,y,t) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial \nu}{\partial t}(x,y,t) - \Delta_y \nu(x,y,t) = 0.$$

Mit der Voraussetzung $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$ erhalten wir ferner

$$\Delta_y \nu(x,y,t) = \Delta_y \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x,y+t\xi)\, dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_y u(x,y+t\xi)\, dS_\xi \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x,y+t\xi)\, dS_\xi$$

$$= \Delta_x \nu(x,y,t).$$

Halten wir $y \in \mathbb{R}^n$ fest, so genügen also beide

Funktionen $\mu(\cdot, y, \cdot)$ und $\nu(\cdot, y, \cdot)$ der Darboux-Dgl. (*) und auch die Anfangswerte stimmen überein. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes (mit $q(t) = \frac{n-1}{t}$) folgt, dass $\mu(x, y, t) = \nu(x, y, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Da y in dieser Überlegung beliebig war, gilt $\mu = \nu$. $\square$

Darüber hinaus benötigen wir die folgende Hilfsaussage zur Integration über die Einheitssphäre:

Lemma 1: Es sei $n \geq 2$ und $f \in C([-1, 1])$. Dann ist

$$\int_{|\xi|=1} f(\xi_n)\, dS_\xi = \omega_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

Bew.: Mit $\xi = (\xi', \xi_n)$, wobei $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ist, haben wir

$$\int_{|\xi|=1} f(\xi_n)\, dS_\xi = \int_{|\xi'|<1} f(\sqrt{1-|\xi'|^2}) + f(-\sqrt{1-|\xi'|^2})\, \frac{d\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}$$

$$= \int_0^1 \int_{|\xi'|=\varrho} f(\sqrt{1-\varrho^2}) + f(-\sqrt{1-\varrho^2})\, \frac{dS_{\xi'}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho \quad \begin{pmatrix}\text{Polarko-}\\ \text{ordinaten}\end{pmatrix}$$

$$= \omega_{n-1} \cdot \int_0^1 f(\sqrt{1-\varrho^2}) + f(-\sqrt{1-\varrho^2})\, \frac{\varrho^{n-2}}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho =: (*)$$

Jetzt substituieren wir $t = \sqrt{1-\varrho^2}$, d.h. $\varrho = \sqrt{1-t^2}$ und $d\varrho = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ oder $\varrho\, d\varrho = -t\, dt$. Das Vorzeichen wird mit den Integralgrenzen verarbeitet, und wir erhalten

$$(*) = \omega_{n-1} \int_0^1 (f(t)+f(-t))\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt$$

$$= \omega_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} f(t)\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt, \text{ wie behauptet.} \quad \square$$

Satz 2 (Abelsche Integralgleichung): Es sei $n \geq 3$ ungerade und $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Lösung von $\square u(x,t) = 0$ mit $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. Dann ist $u(x,t) = u(x,-t)$ und es gilt

$$\int_{-t}^{t} u(x,s)(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\,ds = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot t^{n-2} M(x,t;u_0).$$

Bew.: (1) $u(x,t) = u(x,-t)$ gilt wegen der Invarianz von $\square u = 0$ unter Zeitspiegelung und dem Eindeutigkeitssatz.

(2) Zum Beweis der Integralgleichung setzen wir

$$v(x,y) := u(x, y_n).$$

Da $\square u(x,t) = 0$ gilt, ergibt sich

$$\Delta_x v(x,y) = \Delta_x u(x,y_n) = \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} u(x,y_n) = \Delta_y v(x,y),$$

das heißt: v genügt der Voraussetzung des MWS von Asgeirsson. Diesen wenden wir an mit dem Zentrum $(x,0)$ und erhalten

$$M(x,t;u_0) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|=1} u_0(x+t\xi)\,dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x+t\xi,0)\,dS_\xi$$

$= \ldots \longrightarrow$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|=1} v(x+t\xi, 0)\, dS_\xi \overset{MWS}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} v(x, t\xi)\, dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|=1} u(x, t\xi_n)\, dS_\xi = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} u(x, t\rho)(1-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho,$$

letzteres nach Lemma 1 mit $f(\xi_n) = u(x, t\xi_n)$ und ρ anstelle von t. Jetzt substituieren wir

$$s = t \cdot \rho, \quad d\rho = \frac{1}{t} ds, \quad (1-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{n-3} (t^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}},$$

so dass

$$M(x, t; u_0) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{n-2} \cdot \int_{-t}^{t} u(x, s)(t^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds.$$

Multiplikation mit $\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot t^{n-2}$ liefert jetzt die Behauptung. $\square$

Bleibt "nur noch" die Abelsche Integralgleichung zu lösen, die wir aufgrund der Symmetrie des Integrals in der Form

$$\int_0^t u(x, s)(t^2 - s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds = \frac{\omega_n}{2\omega_{n-1}} \cdot t^{n-2} M(x, t; u_0) =: \varphi(t)$$

ausschreiben können. Differenzieren ergibt

$$t \cdot (n-3) \cdot \int_0^t u(x, s)(t^2 - s^2)^{\frac{n-5}{2}} ds = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)$$

bzw.

$$\int_0^t u(x, s)(t^2 - s^2)^{\frac{n-5}{2}} ds = \frac{1}{n-3} \cdot \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(t).$$

Für $n \geq 5$ leiten wir erneut nach t ab:

$$\int_0^t u(x,s)\,(t^2-s^2)^{\frac{n-7}{2}}\,ds = \frac{1}{(n-3)}\,\frac{1}{(n-5)}\cdot\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \varphi(t)$$

Das macht man $\frac{n-3}{2}$-mal und gelangt zu

$$\int_0^t u(x,s)\,ds = \frac{1}{(n-3)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \varphi(t),$$

wobei $(n-3)!! = (n-3)(n-5)\cdot\ldots\cdot 2$. Eine letzte Ableitung führt mit $\varphi(t) = \frac{\omega_n}{2\omega_{n-1}}\cdot t^{n-2} M(x,t;u_0)$ auf

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{\omega_n}{2\omega_{n-1}}\cdot\frac{1}{(n-3)!!}}_{}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M(x,t;u_0)\right)$$

$= \frac{1}{(n-2)!!}$ nach etwas Rechnung, wobei man $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ und $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ beachten muss. Vgl. Sauvigny, Band 1, S. 411 ff.

<u>Regularität:</u> In dieser Formel liegen

$$\frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$$

Zeitableitungen auf dem sphärischen Mittelwert $M(x,t;u_0)$. Zwei weitere Ableitungen enthält der $\square$-Operator. Damit diese Formel zu einer klassischen Lösung führen kann, müssen wir also

$$u_0 \in C^{\frac{n-1}{2}+2}(\mathbb{R}^n) = C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

voraussetzen.

2. Anfangswert: Sei $v \in C^3(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung von $\Box v(x,t) = 0$, $v(x,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$. Wir setzen $w(x,t) := \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$; dann gelten

$$\Box w(x,t) = 0 \qquad w(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,0) = \Delta v(x,0) = 0 \quad (\text{weil } v(x,0)=0).$$

Damit sind wir mit w in der oben betrachteten Situation und erhalten:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = w(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} M(x,t;u_1)\right)$$

Integration nach t ergibt

$$v(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!} \underbrace{\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} M(x,t;u_1)\right)}_{\text{enthält mindestens einen Faktor } t} + C(x)$$

mit $0 = v(x,0) = C(x)$.

Wenn wir uns jetzt davon begnügen, dass der Ausdruck für v in $C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ liegt, müssen wir $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ voraussetzen.

Damit haben wir einen Kandidaten für die Lösung des Cauchy-Problems gefunden und wir können – als wohl begründete Vermutung – den folgenden Existenzsatz mit Integraldarstellung der Lösung formulieren:

Satz 3: Es seien $n \geq 3$ ungerade, $u_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-2)!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} M(x,t;u_0)\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} M(x,t;u_1)\right) \right\}. \tag{205}$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ die Lösung des Cauchy-Problems

$$\Box u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x).$$

Der Beweis dieses Satzes (und damit der Existenz einer klassischen Lösung) besteht darin, nachzurechnen, dass die angegebene Funktion u der Dgl. und den Anfangsbedingungen genügt. Das ist elementar, langweilig und mühsam, daher möchte ich das Ihnen und mir ersparen. Stattdessen sei verwiesen auf Sauvigny, Band 1, S. 411 ff..