4.2 Eindeutigkeit

Hier formulieren und beweisen wir einen räumlich lokalen Eindeutigkeitssatz für Lösungen des Cauchy-Problems

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

für die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + q \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = f \qquad (*)$$

mit einem Dämpfungsterm $q \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$ für den

$$q \in C(\mathbb{R}^4 \times [0,\infty)) \quad \text{und} \quad q(x,t) \geq 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^4 \times [0,\infty)$$

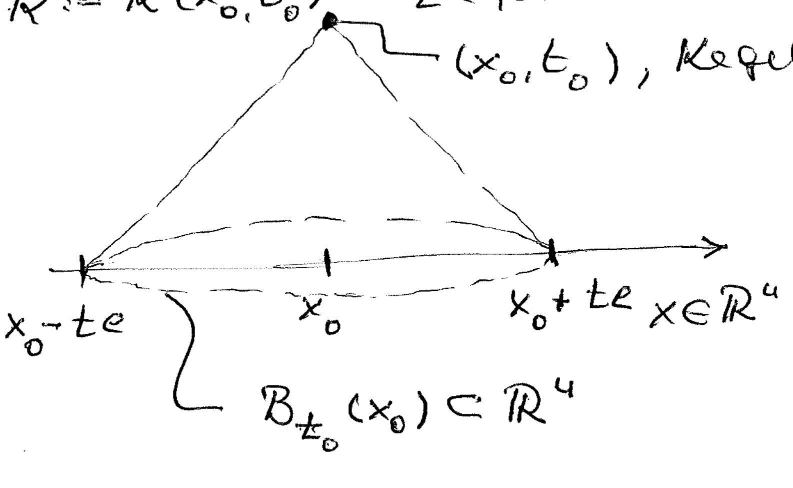
vorausgesetzt wird. Mit Lemma 1 aus dem vorigen Abschnitt ist damit zugleich eine Eindeutigkeitsaussage für das Cauchy-Problem

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \quad \text{für die Dirac-Gl.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\psi = F$$

gezeigt.

Für $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^4 \times (0,\infty)$ definieren wir den Kegel

$$K := K(x_0,t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^4 \times [0,t_0] : |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$



K ist kompakt.

Eindeutigkeitssatz: Es sei $u \in C^2(\mathring{K}) \cap C^1(K)$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \forall x \in \overline{B_{t_0}(x_0)}$$

für die gedämpfte KGG (*) mit $f = 0$. Dann ist $u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in K$.

Bew.: O.E. nehmen wir u als reell an und multiplizieren die Gleichung mit $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta u + m^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u + \underbrace{q \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u(t)|^2 + m^2 u^2}_{2\mathcal{E} = 2\mathcal{E}(x,t),\ \text{Energiedichte}} \Big)$$

$$- \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta u \right)}_{= \langle \nabla u_t, \nabla u \rangle + u_t \Delta u = \operatorname{div}_x (u_t \cdot \nabla_x u)} \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Das integrieren wir über den Kegelstumpf

$$G := \{ (x,t) \in K : 0 \leq t \leq t_1 \}, \text{ wobei } t_1 \in (0, t_0).$$

Dann ist

$$0 \geq \int_G \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x,t) - \operatorname{div}_x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cdot \nabla_x u(x,t) \right) dx\,dt =: (*),$$

und hierauf soll der Gausssche Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} F(x,t)\,dx\,dt = \int_{\partial G} \langle F(x,t), \nu(x,t) \rangle\, dS_{(x,t)}$$ angewendet werden.

Dabei enthält die Divergenz nicht nur die Raumableitungen, sondern auch die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$. Für das Vektorfeld (189)

$$F(x,t) := (\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\nabla_x u(x,t)}_{n \text{ Komponenten}}, \mathcal{E}(x,t))$$

erhalten wir

$$\operatorname{div} F(x,t) = -\operatorname{div}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\nabla_x u(x,t)\right) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x,t),$$

also den Integranden in (*). Wir erhalten die Beiträge

$$0 = (*) = \underbrace{\int_{|x-x_0|<t_0-t_1} \mathcal{E}(x,t_1)\,dx}_{\text{vom Deckel}} \quad - \underbrace{\int_{|x-x_0|<t_0} \mathcal{E}(x,0)\,dx}_{\text{vom Boden}}$$

$$+ \int_{\text{Mantel}} \mathcal{E}(x,t)\nu_t(x,t) - \langle \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\nabla_x u(x,t), \nu_x(x,t)\rangle \, dS_{(x,t)}$$

Nun ist auf dem Kegelmantel $\nu_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $|\nu_x(x,t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so dass

$$|\mathcal{E}(x,t)\nu_t(x,t) - \langle \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\nabla_x u(x,t), \nu_x(x,t)\rangle|$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}^2(x,t) + |\nabla_x u(x,t)|^2 + \omega^2 u^2(x,t)\right) - \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\nabla_x u(x,t)\right|\right) \geq 0,$$

letzteres, weil $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Es folgt

$$\int_{|x-x_0|<t_0} \mathcal{E}(x,0)\,dx \geq \int_{|x-x_0|<t_0-t_1} \mathcal{E}(x,t_1)\,dx \quad \forall\, t_1 \in (0,t_0).$$

Sind nun $u_0(x) = u_1(x) = 0$ für $|x - x_0| \le t_0$, wie vorausgesetzt, so ist auch $\mathcal{E}(x,0) = 0$ und damit verschwinden beide Integrale. Weil $\mathcal{E}(x,t)$ stetig und $\mathcal{E} \ge 0$ ist, folgt

$$\mathcal{E}(x, t_1) = 0 \quad \forall \ (x, t_1) \in K$$

Damit ist u konstant auf K ($m = 0$ ist möglich!).

Wegen $u_0 = 0$ folgt weiter $u \equiv 0$ auf K. $\square$

<u>Interpretation:</u> Stimmen die Daten (u_0, u_1) und (v_0, v_1) zweier Lösungen u und v auf einer Kugel $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ überein, so ist $u|_{K(x_0,t_0)} = v|_{K(x_0,t_0)}$, auch wenn sie sich außerhalb dieser Mengen unterscheiden können. Insofern ist die Eindeutigkeitsaussage lokal. Globale Eindeutigkeit ergibt sich hieraus, wenn $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$ auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ gilt.

Wir können auch sagen: Der Wert $u(x_0, t_0)$ an der Stelle (x_0, t_0) wird nur von den Werten der Daten auf $\overline{B_{t_0}(x_0)}$ bestimmt. Das ist das <u>"schwache Huyghensche Prinzip"</u>, was in allen Raumdimensionen und auch für $m \neq 0$ gilt.

Ziehen wir noch die Invarianz der KGG unter Zeitspiegelung und -translation in Betracht, so können wir den Kegel nach oben öffnen und die Spitze nach $(x_0, 0)$ legen. Dann liest sich die Interpretation so: (180a)

Der Wert der Daten (u_0, u_1) an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beeinflusst die Lösung u nur in dem "Vorwärts-" oder "Lichtkegel" $K_{x_0} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq t\}$. Das ist eine andere Formulierung für die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, wobei hier $c = 1$ normiert wurde.

Wegen Lemma 1 im vorigen Abschnitt, gilt dies alles auch für die Dirac-Gleichung.