4. Wellengleichungen im engeren Sinne

Damit sind im wesentlichen zwei Gleichungen gemeint, die durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ihrer Lösungen charakterisiert sind.

Def.: Es sei $u : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^N$, $(x,t) \longmapsto u(x,t)$ eine Funktion, die zu einer Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ kompakten Träger $\operatorname{supp} u(\cdot, t_0) \subset B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ hat. Dann hat u die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$, wenn gilt

(1) Für jedes $t > 0$ ist $\operatorname{supp} u(\cdot, t_0 + t) \subset B_{R+ct}(x_0)$;

(2) c ist minimal mit dieser Eigenschaft.

Bsp.: Die Schrödingergleichung wird auch als Wellengleichung angesehen, ihre Lösungen

$$u(x,t) = \sqrt{4\pi i t}^{\,-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

haben aber <u>unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit</u>: Auch wenn u_0 kompakten Träger hat, wird i. Allg. für jedes $t > 0$ $\operatorname{supp} u(\cdot, t) = \mathbb{R}^n$ sein.

Um welche Gleichungen soll es also gehen?

4.1 Gleichungen und Invarianzeigenschaften

1. Die <u>Klein-Gordon-Gleichung</u>

$$(\Box + m^2)\, u := \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\Big)\, u = f \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Laplace-Operator bzgl. der x-Variablen

d'Alembert- oder auch Box-Operator

Für $m=0$ handelt es sich um die klassische Wellengleichung $\Box u = f$, die eine Vielzahl physikalischer Phänomene beschreibt, z.B.:

- Schwingungen einer Saite ($n=1$) oder einer Membran ($n=2$);
- Ausbreitung von Licht, allgemeiner von elektromagnetischen Wellen im Vakuum oder in homogenen und isotropen Medien ($n=3$), die Wellengleichung lässt sich herleiten aus den Maxwell'schen Gleichungen, das sind die Grundgleichungen der klassischen Elektrodynamik;
- Ausbreitung von Schall, ebenfalls in homogenen und isotropen Medien.

Die Klein-Gordon-Gleichung wurde in den 20er Jahren zuerst von Schrödinger und dann von Klein und Gordon vorgeschlagen als fundamentale Gleichung einer relativistischen Formulierung der Quantenmechanik. Das hat sich nicht durchgesetzt, u.a., weil die von J. von Neumann u.a. entwickelte Axiomatik der Quantentheorie verlangt, dass die Dynamik eines quantalen Systems stets durch eine PDG beschrieben wird, die von erster Ordnung in der Zeit ist. Die KGG spielt dennoch in einigen fortgeschrittenen physikalischen Theorien eine wesentliche Rolle, insbesondere in nichtlinearen Systemen (KG-Zakharov- und Dirac-KG-Systeme). An die Stelle der KGG in der relativistischen QM getreten ist die

2. Dirac-Gleichung,

die eigentlich ein System aus $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$ Gleichungen ist:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -i\,\alpha \cdot \nabla \psi(x,t) + \beta m \psi(x,t) \; (+ f(x,t))$$

$$:= -i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x,t) + \beta \cdot m \psi(x,t) \quad (+ f(x,t)).$$

Hierbei ist $\psi : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{C}^N$ die gesuchte Lösung, der sog. "Spinor", und bei den Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β handelt es sich um hermitesche $N \times N$-Matrizen, die sog. "Dirac-Matrizen". (Hermitesch: $A = A^*$, d.h. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$) Die physikalische Theorie stellt hieran die folgenden Bedingungen ("Antivertauschungsrelationen"):

(1) $\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} E_N$ ($E_N = N \times N$ Einheitsmatrix)

(2) $\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0$; $\beta^2 = E_N$

Aus $\alpha_k^2 = \beta^2 = E_N$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz, dass $(\det \alpha_k)^2 = (\det \beta)^2 = 1$, also $\det \alpha_k, \det \beta \in \{\pm 1\}$. Hermitesche Matrizen haben stets reelle Eigenwerte, hierfür kommen nur $\lambda \in \{\pm 1\}$ in Frage.

Bsp.: (1) Für $n \in \{1,2\}$ hat man $N = 2$ und man kann die Paulischen Spin-Matrizen verwenden, das sind die 2×2-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Genauer wählt man

- für $n=1$: $\alpha_1 = \sigma_1$, $\beta = \sigma_3$,
- für $n=2$: $\alpha_{1,2} = \sigma_{1,2}$, $\beta = \sigma_3$.

(2) Für $n=3$ ist $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]} = 4$, in diesem Fall ist die Verwendung von

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \; j \in \{1,2,3\}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}$$

üblich, wobei die Einträge selbst 2×2-Matrizen sind, nämlich die Pauli-Matrizen σ_j und die Einheitsmatrix E_2.

Dass die Antivertauschungsregeln (1) und (2) für die genannten Beispiele erfüllt sind, ist eine (etwas mühsame) Aufgabe zur Matrizenmultiplikation. Dass für $n \geq 4$ das Format $N \times N$ mit $N = 2^{[\frac{n+1}{2}]}$ notwendig und hinreichend ist, bedarf genauerer (algebraischer) Überlegungen.

Die Klein-Gordon-Gleichung ist ebenso wie die klassische Wellengleichung eine kanonische Vertreterin für die <u>hyperbolischen</u> Dglen. 2. Ordnung. Die Dirac-Gleichung ist als Gleichung 1. Ordnung nicht in diese Klassifizierung einzuordnen. Sie steht jedoch in engem Zusammenhang mit der KGG. Um diesen einzusehen, setzen wir

$$H_1 := \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + im\beta, \qquad \begin{pmatrix}\text{keine Standard-}\\ \text{bezeichnung}\end{pmatrix}$$

so dass die freie Dirac-Gleichung $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\sum_{j=1}^{4}\alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + m\beta\psi$ die einfache Gestalt $\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\psi = 0$ annimmt.

<u>Lemma</u> 1: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (Zeit-)intervall mit $0 \in I$. Dann gelten:

(1) Es sei $\psi \in C^2(\mathbb{R}^4 \times I, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung der freien Dirac-Gleichung $\frac{\partial \psi}{\partial t} + H_1\psi = 0$ mit $\psi(x,0) = \psi_0(x)$. Dann ist (jede Komponente von) ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung und für $t=0$ gilt

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = -H_1\psi_0(x).$$

(2) Ist (jede Komponente von) $u \in C^2(\mathbb{R}^4 \times I, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

$(\Box + m^2)u(x,t) = 0$ mit $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$ und $\psi(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)u(x,t)$, so löst ψ die freie Dirac-Gleichung und es gilt $\psi(x,0) = u_1(x) - H_1 u_0(x)$.

Bew.: (1) Die Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ $(= \frac{\partial}{\partial t} E_N)$ vertauscht mit H_1, so dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - H_1^2 ,$$

wobei

$$H_1^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + i m \beta\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + i m \beta\right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + i m \cdot \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \beta + \beta \alpha_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - m^2 \beta^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{1 \le j < k \le n} (\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$+ i m \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \beta + \beta \alpha_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - m^2 \beta^2 .$$

Nun verlangen die Antivertauschungsrelationen, dass $\alpha_k^2 = \beta^2 = E_N$, $\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0$ $(j \neq k)$, $\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0$, also

$$H_1^2 = \Delta - m^2 \quad (= \Delta E_N - m^2 E_N)$$

und insgesamt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 = \Box + m^2 .$$

(2) Nun sei $\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\psi = 0$ und $\psi(x,0) = \psi_0(x)$. Dann ist

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\psi = (\Box + m^2)\psi$$

und

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \text{ sowie } \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = -H_1 \psi(x,0) = -H_1 \psi_0(x).$$

(3) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^4 \times I, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung von

$$0 = (\Box + m^2)u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + H_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)u, \quad u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

und $\psi := \left(\frac{\partial}{\partial t} - H_1\right)u$. Dann löst ψ die freie Dirac-Gleichung $\frac{\partial \psi}{\partial t} + H_1\psi = 0$ und zur Zeit $t=0$ gilt

$$\psi(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - H_1 u(x,0) = u_1(x) - H_1 u_0(x). \ \Box$$

Bem.: (1) Wir haben beide Richtungen zur Verfügung. Damit können wir sowohl Existenz- als auch Eindeutigkeitsaussagen für das Cauchy-Problem sowie Integraldarstellungen von der KGG auf die Dirac-Gleichung vererben.

(2) Die hier verwendete Zerlegung eines Differenzialoperators in "Linearfaktoren" ist auch bei anderen Zusammenhängen nützlich. Z.B. sollen Sie zur Behandlung der 1+1-Dimensionalen Wellengleichung auf dem aktuellen Aufgabenblatt die Zerlegung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

benutzen. Ein weiteres Beispiel liefert der Schrödinger-Operator:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right)u$$

und die Gleichung $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right)u = f$ ist die Plattengleichung.

<u>Invarianz der homogenen linearen Gleichungen</u> unter einigen <u>affin-linearen Transformationen</u>:

Einfach einzusehen sind

(1) Translationsinvarianz: Ist $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$ eine Lösung von KGG bzw. DG, so gilt dasselbe für $\tau_{(x_0,t_0)}u$, definiert durch $\tau_{(x_0,t_0)}u(x,t) = u(x-x_0, t-t_0)$.

(2) Im Fall $m=0$, also für die klassische Wellengleichung und die masselose Dirac-Gleichung, gilt die Invarianz unter Skalentransformationen, d.h.: Ist u eine Lösung und, für $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda t)$, so ist u_λ ebenfalls eine Lösung derselben Gleichung.

Schwieriger und interessanter wird es bei den

(3) Lorentztransformationen.

<u>Def.</u>: Es sei $G = \mathrm{diag}(-1,\dots,-1,1) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Eine lineare Abbildung $\Lambda = (\lambda_{jk})_{1\le j,k\le n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißt eine (eigentliche) Lorentztransformation, falls $\Lambda G \Lambda^T = G$ gilt.

<u>Bem.</u>: (1) Translationen und eigentliche Lorentztransformationen bilden zusammen die Gruppe der uneigentlichen Lorentztransformationen. Die Bezeichnungen in der Literatur sind uneinheitlich, hier ist eine gewisse Vorsicht geboten.

(2) Die definierende Gleichung $\Lambda G \Lambda^T = G$ lautet in Komponenten (wenn man $t = x_{n+1}$ setzt):

$$g_{il} = \sum_{j,k=1}^{n+1} \lambda_{ij}\, g_{jk}\, \lambda_{lk} \qquad (1 \le i, l \le n+1).$$

Da die Matrix G Diagonalform hat, gilt $g_{jk} = \delta_{jk}\, g_{kk}$, so dass man dies zusammenziehen kann zu

$$g_{jl} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{jk}\, g_{kk}\, \lambda_{lk} \qquad (1 \le j, l \le n+1).$$

(3) Beispiele für Lorentztransformationen sind Zeitspiegelungen $t \mapsto -t$ und orthogonale Transformationen (Drehungen, Spiegelungen) $x \mapsto Ox$ des $\mathbb{R}^n_x$ in sich. Hierbei bleiben allerdings Zeit- und Ortsvariable separiert.

(4) Ein interessantes Bsp. für eine Lorentztransformation, bei der Zeit- und Ortsvariable gemischt werden, ist der sog. "Lorentz-boost". Dieser wird für $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < |v| < 1$ folgendermaßen definiert: Man setzt $\gamma := \gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}}$ und $\Lambda_v = (\lambda_{jk})_{1 \le j,k \le n+1}$ mit

$$\lambda_{jk} = \delta_{jk} + \frac{\gamma(v) - 1}{|v|^2}\, v_j v_k \qquad (1 \le j, k \le n)$$

$$\lambda_{n+1,n+1} = \gamma(v), \qquad \lambda_{n+1,k} = \lambda_{k,n+1} = \gamma(v) \cdot v_k \quad (1 \le k \le n).$$

Dann ist Λ_v eine symmetrische $(n+1)\times(n+1)$-Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n + \frac{\gamma-1}{|v|^2} v v^T & \gamma v \\ \hline \gamma v^T & \gamma \end{array}\right)$$

Die (etwas mühsame) Aufgabe (zur Matrixmultiplikation), nachzurechnen, dass es sich hierbei um eine Lorentztransformation handelt, sei zur Übung empfohlen. Um die Bezeichnung "boost" zu klären, betrachten wir ein ruhendes Objekt (Teilchen), das zu zwei aufeinanderfolgenden Zeiten $t_1 < t_2$ die Koordinaten $(x, t_1)^T$ bzw. $(x, t_2)^T$ habe. Anwendung von Λ_v ergibt

$$\Lambda_v \begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} x + \frac{\gamma-1}{|v|^2} v \langle v, x\rangle + \gamma v t_i \\ \hline \gamma \langle v, x\rangle + \gamma t_i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} y_i \\ \hline s_i \end{array}\right)$$

mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\frac{y_2 - y_1}{s_2 - s_1} = \frac{\gamma v (t_2 - t_1)}{\gamma (t_2 - t_1)} = v.$$

Durch Anwendung von Λ_v wird also ein ruhendes Objekt auf die Geschwindigkeit v gebracht.

Lemma 2: Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C})$ eine Lösung der homogenen linearen Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\, u(x,t) = 0,$$

Λ eine Lorentztransformation und $v(x,t) = u(\Lambda(x,t))$. Dann löst v ebenfalls diese Gleichung.

Bew.: Wir setzen $t := x_{n+1}$, $\bar{x} = (x, x_{n+1})$ und haben mit $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n+1} = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1)$ für den Box-Operator

$$\Box = \sum_{j=1}^{n+1} g_{jj} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir für $j \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\Lambda \bar{x}) \cdot \underbrace{\frac{\partial (\Lambda \bar{x})_k}{\partial x_j}}_{= \lambda_{kj}} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{kj} \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k}(\Lambda \bar{x})$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\Lambda \bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \lambda_{kj} \lambda_{lj} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}(\Lambda \bar{x})$$

Summation über j mit Gewichten g_{jj} ergibt

$$\Box v(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n+1} g_{jj} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{kj} g_{jj} \lambda_{lj}}_{= g_{kl} = \delta_{kl} g_{kk}} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}(\Lambda \bar{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} g_{kk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}(\Lambda \bar{x}) = \Box u(\Lambda \bar{x})$$

$$= -m^2 u(\Lambda \bar{x}) = -m^2 v(\bar{x}). \qquad \Box$$

um zu erklären, in welchem Sinn die homogene lineare Dirac-Gleichung

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\psi = m\beta\psi$$

Lorentz-invariant ist, multipliziert man mit $\gamma_{n+1} := \beta$, setzt $\gamma_k := \beta\alpha_k$ $(1 \le k \le n)$ und $t = x_{n+1}$, so dass man die etwas handlichere Form

$$i\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = m\psi \qquad (*)$$

erhält. Ist nun $\Lambda = (\lambda_{jk})_{1\le j,k\le n+1}$ eine Lorentztransformation, so existiert eine Matrix $S = S(\Lambda) \in \mathbb{C}^{N\times N}$

mit
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{jk}\gamma_k = S^{-1}\gamma_j S .$$

Dann gilt: Ist ψ eine Lösung von $(*)$ und

$$\varphi(x,t) := S\psi(\Lambda^{-1}(x,t)),$$

so löst φ ebenfalls $(*)$.

Die letzte Aussage ist wieder eine Anwendung der Kettenregel, ähnlich wie in Lemma 2. Die Eigenschaft "Lorentz" wird aber nicht dafür, sondern für die Existenz der Matrix S benötigt. (Einzelheiten für $n=3$ in: Thaller, Bernd: The Dirac Equation, Appendix 2D)