3.5 Eindeutigkeit

Für die freie Schrödinger-Gleichung ergibt sich die Eindeutigkeit einer Lösung des Cauchy-Problems aus der Erhaltung der L^2_x-Norm.

Bez.: Für eine Funktion u zweier Variablen (x,t) bezeichne $u(\cdot,t)$ die Abbildung $x \mapsto u(x,t)$.

Satz 1: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (Zeit-) Intervall mit $0 \in I$ und $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times I)$ eine Lösung von

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \Delta u(x,t) = 0; \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

so dass die Abbildungen

$$t \mapsto u(\cdot,t), \quad I \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{und}$$

$$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t), \quad I \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

stetig sind. Dann ist für alle $t \in I$ $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$.

Bew.: Für $h \neq 0$ haben wir

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t+h)|^2 - |u(x,t)|^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} \cdot \bar{u}(x,t+h) + u(x,t) \frac{\bar{u}(x,t+h) - \bar{u}(x,t)}{h} \, dx$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} \cdot \bar{u}(x,t) \, dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} |u(x,t+h) - u(x,t)|^2 \, dx =: I_h + II_h$$

wobei $I - 2\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cdot \bar{u}(x,t)\,dx$

$$\leq 2 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{h}(u(x,t+h) - u(x,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| \cdot |u(x,t)|\,dx$$

$$\leq 2 \cdot \left\| \frac{1}{h}(u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \right\|_{L^2} \|u(\cdot,t)\|_{L^2} \qquad (*)$$

Zur Abschätzung des ersten Faktors schreiben wir

$$\frac{1}{h}(u(x,t+h) - u(x,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$
$$= \frac{1}{h} \cdot \int\limits_0^h \frac{\partial u}{\partial t}(x,t+s) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,ds \qquad (x \text{ fest!})$$

Dann ist aufgrund der Minkowski-Ungleichung für Integrale

$$\left\| \frac{1}{h}(u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \right\|_{L^2}$$

$$\leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_0^h \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t+s) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) \right\|_{L^2} ds \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

und somit $\lim\limits_{h \to 0} I_h = 2\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\bar{u}(x,t)\,dx$. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass $\lim\limits_{h \to 0} II_h = 0$. Damit ist die Vertauschung von $\frac{d}{dt}$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ldots dx$ gerechtfertigt und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cdot \bar{u}(x,t)\,dx$$

$$\underset{\text{Dgl.}}{=} \operatorname{Re}\, i \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Delta u(x,t)) \cdot \bar{u}(x,t)\,dx$$

$$\underset{\text{Parseval}}{=} -\operatorname{Re}\, i \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2\, \hat{u}(\xi,t)\,\overline{\hat{u}}(\xi,t)\,d\xi = 0.$$

$\square$

Folgerung: Ist $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times I)$ eine Lösung von

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

die den Stetigkeitsforderungen an u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ aus Satz 1 genügt, so ist hierdurch u eindeutig bestimmt.

Bew.: Sei v eine weitere derartige Lösung und $w = u - v$. Dann ist $i \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - \Delta w(x,t) = 0$ und $w(x,0) = 0$. w genügt den Voraussetzungen von Satz 1, sodass $\|w(\cdot,t)\|_{L^2} = \|w(\cdot,0)\|_{L^2} = 0$ für alle $t \in I$. Also $w \equiv 0$. □

Ebenso kann man auch für die Wärmeleitungsgleichung argumentieren. Man erhält unter ansonsten gleichen Voraussetzungen

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|w(\cdot,t)\|^2_{L^2} \leq 0 \;\Rightarrow\; \|w(\cdot,t)\|_{L^2} \leq \|w(\cdot,0)\|_{L^2} = 0$$

und damit $w = 0$, also die Eindeutigkeit wie in der obigen Folgerung. Mit Hilfe eines Maximumprinzips kann man jedoch eine Eindeutigkeitsaussage für die WLG unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen zeigen. Wir beginnen mit einem Maximumprinzip für beschränkte Gebiete.

Bez.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Dann bezeichnet

$$\Omega_T := \Omega \times (0,T)$$

den Zylinder der Höhe T mit Basis Ω. Ferner setzt man

$$\partial^* \Omega_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]) \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

(Der "Deckel" $\Omega \times \{T\}$ des Zylinders gehört nicht zu $\partial^* \Omega_T$.)

Satz 2 (Maximumprinzip für die WLG): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \leq 0 \text{ in } \Omega_T.$$

Dann ist

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega_T}\} = \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \partial^* \Omega_T\}.$$

Bew.: (1) Zunächst sei angenommen, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) < 0 \text{ in } \Omega_T \qquad (A).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ sind

$u : \overline{\Omega_{T-\varepsilon}} \to \mathbb{R}$ stetig und $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ kompakt.

Also existiert $(x,t) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$, so dass

$$\sup\{u(y,s) : (y,s) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}\} = \max\{u(y,s) : (y,s) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}\} = u(x,t).$$

Die Annahme $(x,t) \in \Omega_{T-\varepsilon}$ führt auf

$(\nabla_x u(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)) = 0$, insbes. auf $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$.

Da auch die Abbildung $y \mapsto u(y,t)$ in x maximal wird, folgt weiter

$$\Delta u(x,t) = \operatorname{Spur}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x,t)\right) \le 0,$$

d.h. wir haben $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \ge 0$ im Widerspruch zu (A). Auch die Annahme $x \in \Omega$, $t = T-\varepsilon$ ergibt

$\Delta u(x,t) \le 0$ und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{h \nearrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}}_{<0} \underbrace{(u(x,t+h) - u(x,t))}_{\le 0} \ge 0,$$

also $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \ge 0$, erneut ein Widerspruch zu (A). Also gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}\} \le \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \partial^*\Omega_{T-\varepsilon}\}$$

$$\le \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \partial^*\Omega_T\}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \Omega_T \cup \partial^*\Omega_T\} = \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \partial^*\Omega_T\}$$

und wegen der Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega}_T$

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega}_T\} = \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \partial^*\Omega_T\}.$$

(2) Ist $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \le 0$ in Ω_T, so gilt für

$$u_\varepsilon(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t,$$

dass $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,t) - \Delta u_\varepsilon(x,t) < 0$ in Ω_T und daher

nach (1)

$$\sup\{u_\varepsilon(x,t) : (x,t)\in\overline{\Omega}_T\} \leq \sup\{u_\varepsilon(x,t) : (x,t)\in\partial^*\Omega_T\}$$
$$\leq \sup\{u(x,t) : (x,t)\in\partial^*\Omega_T\}.$$

Damit gilt für alle $(x,t)\in\overline{\Omega}_T$ und für alle $\varepsilon>0$

$$u(x,t) \leq \sup\{u_\varepsilon(x,t) : (x,t)\in\overline{\Omega}_T\} + \varepsilon T$$
$$\leq \sup\{u(x,t) : (x,t)\in\partial^*\Omega_T\} + \varepsilon T.$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ und der Bildung des Supremums auf der linken Seite folgt die Beh. □

Mit Hilfe dieses Maximumprinzips erhalten wir einen Eindeutigkeitssatz für das folgende (bisher noch nicht betrachtete) Anfangs-Randwertproblem:

<u>Folgerung</u>: Es sei $u\in C^{2,1}(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ in } \Omega_T,$$

$u(x,0)=u_0(x)$ in Ω, $u(x,t)=g(x,t)$ in $\partial\Omega\times[0,T]$ (mit stetigen Funktionen f, u_0 und g, dabei u_0 und g passend). Dann ist u eindeutig bestimmt.

Um ein entsprechendes Maximumprinzip für $\Omega=\mathbb{R}^n$ zeigen zu können, muss man zusätzlich eine Wachstumsschranke für die Lösung u voraussetzen:

Satz 3 (Maximumprinzip für das Cauchy-Problem zur WLG):

Es sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \text{ und } u(x,0) = u_0(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gebe es Konstanten $M, \lambda > 0$, so dass

$$u(x,t) \leq M \cdot e^{\lambda |x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$$

Dann ist

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]\} = \sup\{u_0(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Bew.: O.E. können wir $T < \frac{1}{4\lambda}$ annehmen. (Andernfalls zerlegen wir $[0,T] = \bigcup_{k=1}^{N} [(k-1)\tau, k\tau]$ mit $\tau < \frac{1}{4\lambda}$ und iterieren

$$\sup\{u(x,t) : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]\} \leq \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T-\tau]\}$$

$$\ldots \leq \sup\{u(x,t) : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\tau]\} \leq \sup\{u_0(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.)$$

Ferner sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass auch $T + \varepsilon < \frac{1}{4\lambda}$.

Für $\delta > 0$ definieren wir die Hilfsfunktion

$$u_\delta(x,t) = u(x,t) - \delta (T+\varepsilon-t)^{-n/2} \cdot e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}.$$

Der zweite Summand ist hierbei eine Lösung der WLG (Rechnung wie beim Wärmeleitungskern), so dass

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x,t) - \Delta u_\delta(x,t) \leq 0. \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Nun fixieren wir $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ und ...

wählen $\varrho > |x_0|$ sowie $\Omega_T = B_\varrho(0)\times(0,T)$. Dann ergibt Satz 2, angewandt auf u_δ,

$$u_\delta(x_0,t_0) \le \sup\{u_\delta(x,t) : (x,t)\in (B_\varrho(0)\times\{0\})\cup \partial B_\varrho(0)\times[0,T]\}.$$

Nun ist (auf dem Boden von Ω_T)

$$u_\delta(x,0)\le u(x,0)=u_0(x)\le \sup\{u_0(y) : y\in\mathbb{R}^n\},$$

und für $(x,t)\in\partial B_\varrho(0)\times[0,T]$ haben wir

$$u_\delta(x,t) = u(x,t) - \delta(T+\varepsilon-t)^{-n/2}\cdot e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}$$

$$\le M\cdot e^{\lambda\varrho^2} - \delta(T+\varepsilon)^{-n/2}\cdot e^{\frac{\varrho^2}{4(T+\varepsilon)}} \xrightarrow[(\varrho\to\infty)]{} -\infty,$$

letzteres, weil $\lambda < \frac{1}{4(T+\varepsilon)}$. Damit haben wir

$$u_\delta(x_0,t_0)\le \sup\{u_0(x) : x\in\mathbb{R}^n\}$$

und also

$$u(x_0,t_0)\le \sup\{u_0(x) : x\in\mathbb{R}^n\} + \delta(T+\varepsilon-t_0)^{-n/2}\cdot e^{\frac{|x_0|^2}{4(T+\varepsilon-t_0)}}.$$

Das gilt für jedes $\delta>0$ und somit auch

$$u(x_0,t_0)\le \sup\{u_0(x) : x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Bilden wir auf der linken Seite das Supremum über alle $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]$, so folgt die Beh. □

Folgerung: Ist $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

die einer Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \le M e^{\lambda |x|^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$$

genügt, so ist u hierdurch eindeutig bestimmt.

Bem.: Es gibt tatsächlich nichttriviale Lösungen von

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

die der genannten Wachstumsbedingung nicht genügen. Insofern ist diese Voraussetzung in Satz 3 und der Folgerung daraus notwendig und nicht beweistechnischer Natur.