3.4 Fundamentallösungen und die Lösung der inhomogenen Gleichungen

Wir beginnen erst der einfachsten Gleichung, der Wärmeleitungsgleichung:

Lemma 1: Die lokal-integrierbare Funktion

$$E(x,t) := \begin{cases} H_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

ist eine Fundamentallösung des Wärmeleitungsoperators $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. $\left(\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta_x\right)$

Bew.: Der adjungierte Operator ist $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, und für $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1})$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(x,t) \, L^* \varphi(x,t) \, dx \, dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} H_t(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \varphi(x,t) \, dx \, dt$$

$$= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} H_t(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \varphi(x,t) \, dx \, dt.$$

Jetzt integrieren wir zweimal partiell in jeder Ortsvariable und wälzen so den Δ-Operator auf $H_t(x)$ ab. Dann ergibt sich unter Beachtung von

$$\Delta H_t(x) = \frac{\partial}{\partial t} H_t(x)$$

$$\ldots = -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial t} H_t(x)\right)\varphi(x,t) + H_t(x)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt$$ 156

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} -\int_\varepsilon^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(H_t(x)\varphi(x,t)\right)dt\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x,\varepsilon)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x)\varphi(x,0)\,dx + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x)\left(\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)\right)dx$$

$$= \varphi(0,0),$$

denn $(H_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist eine approximative Einheit, und den 2. Summanden kann man durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x)\cdot|\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)|\,dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)| \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} 0$$

$\square$

abschätzen.

22.12.21

Wenn wir diese Fundamentallösung mit einer Funktion $f\in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1})$ falten, erhalten wir nach Satz 1 aus Abschnitt 2.3 (über Fundamentallösungen)

mit $u(x,t) := E * f(x,t)$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} H_{t-s}(x-y)f(y,s)\,dy\,ds \quad (\text{weil } E(x,t)=0 \text{ für } t\leq 0)$$

eine Lösung $u\in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ der inhomogenen WLG

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t).$$

Hierbei ist es wenig sinnvoll, Funktionen f mit $f(x,t) \neq 0$ für $t<0$ zu betrachten; auch die Regularitätsvoraussetzung für t ist zu stark. Um einen Existenzsatz zu formulieren, setzen wir

$$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times I) = \{ f \in C^1(\mathbb{R}^n \times I) : f \text{ ist 2-mal stetig differenzierbar nach den } x\text{-Variablen} \},$$

$$C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times I) = \{ f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times I) : f \text{ hat kompakten Träger} \}.$$

Dann gilt:

Satz 1: Es seien $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x,t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_{t-s}(x-y) f(y,s)\,dy\,ds + \int_{\mathbb{R}^n} H_t(x-y) u_0(y)\,dy, & t>0 \\ u_0(x) & , t=0. \end{cases}$$

Dann ist $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung des Cauchy-Problems $u(x,0) = u_0(x)$ für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t).$$

Bew.: Wir setzen für $t > 0$

$$u_p(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_{t-s}(x-y)\, f(y,s)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_s(y) \cdot f(x-y, t-s)\, dy\, ds .$$

Dann gilt offenbar $\lim_{t \to 0} u_p(x,t) = 0$ und nach Satz 1 aus dem vorigen Abschnitt ist nur noch zu zeigen, dass u_p die inhomogene Gleichung löst. Aufgrund der Trägervoraussetzungen an f können wir unter dem Integral nach den Ortsvariablen differenzieren und erhalten

$$\Delta u_p(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_s(y)\, \Delta_x f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_s(y)\, (-\Delta_y)\, f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} ((-\Delta_y) H_s(y))\, f(x-y, t-s)\, dy\, ds .$$

Für die Zeitableitung müssen wir zusätzlich den Hauptsatz beachten und erhalten

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H_t(y) \cdot f(x-y, 0)\, dy$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H_s(y) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(x-y, t-s)\, dy\, ds =: I + II$$

mit $\mathrm{II} = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\varepsilon}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_s(y) \left(-\frac{\partial}{\partial s} f(x-y, t-s)\right) dy\, ds$

so dass

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t) - \Delta u_p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_t(y) f(x-y,0)\, dy$$

$$+ \lim_{\varepsilon \searrow 0} - \int\limits_{\varepsilon}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial s} H_s(y)\right) f(x-y,t-s) + H_s(y) \frac{\partial f}{\partial s}(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_t(y) \cdot f(x-y,0)\, dy$$

$$+ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(y) f(x-y,t-\varepsilon)\, dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} H_t(y) f(x-y,0)\, dy$$

$= f(x,t)$, wiederum, weil $(H_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit ist, vgl. Bew. von Lemma 1. $\square$

Die Struktur der Lösung der inhomogenen Gleichung in Satz 1 ist

$$u(t) = W(t) u_0 + \int\limits_0^t W(t-s) f(s)\, ds$$

mit einer Schar $(W(t))_{t>0}$ von Evolutionsoperatoren, die im vorliegenden Fall gegeben sind durch

$$W(t) u_0(x) = H_t * u_0(x)$$

Diese Struktur ist bei allen Evolutionsgleichungen mit einer Zeitableitung erster Ordnung zu finden, was als <u>Duhamelsches Prinzip</u> bezeichnet wird. Ein sehr einfaches Bsp. hierfür ist Ihnen bereits früher, in Analysis II begegnet. Ein System

$$y'(t) = Ay(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

gewöhnlicher linearer Dglen. 1. Ordnung mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat die Lösung

$$y(t) = \exp(tA)\, y_0$$

und die Schar $(\exp(tA))_{t\in\mathbb{R}}$ von $n\times n$-Matrizen wird als Lösungsfundamentalsystem (LFS) bezeichnet. Die Lösung des inhomogenen Systems

$$y'(t) - Ay(t) = f(t), \quad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

mit $y(0) = y_0$ kann dann geschrieben werden

$$\text{als} \quad y(t) = \exp(tA)\, y_0 + \int_0^t \exp((t-s)A) f(s)\, ds.$$

In Ana II wird das oft als "Variation der Konstanten"-Formel bezeichnet.

Für die freie Schrödinger-Gleichung kann man eine Fundamentallösung nicht so einfach angeben wie für die Wärmeleitungsgleichung, weil der Schrödinger-Kern

$$S_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \cdot e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \qquad (t \neq 0)$$

für $n \geq 2$ nicht lokal integrierbar ist. Eine Fundamentallösung ist in diesem Fall tatsächlich eine nicht-reguläre Distribution.

Lemma 2: Eine Fundamentallösung der freien Schrödinger-Gleichung ist gegeben durch die Distribution $T: C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto T[\varphi]$ mit

$$T[\varphi] := \frac{-i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x \varphi(\xi, t)\, dt\, d\xi .$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}_x$ die partielle Fouriertransformation bezüglich der Raumvariablen. Eine andere Darstellung von T ist

$$T[\varphi] = -i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \varphi(x,t)\, dx \right) dt ,$$

und hierbei kann die Integrationsreihenfolge nicht vertauscht werden.

Bew.: (1) Zuerst ist z.z., dass durch T (wie angegeben) tatsächlich eine Distribution definiert wird. Die Linearität ist offensichtlich. Zum Nachweis der Stetigkeit sei $(\varphi_k)_k$ eine Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$ $(k\to\infty)$, also mit

$$\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \|(\nabla_x, \partial_t)^\beta \varphi_k\|_\infty = 0 \;\forall \beta\in\mathbb{N}_0^{n+1}.$$

Dann ist $\mathcal{F}_x\varphi_k(\xi,t) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\cdot \mathcal{F}_x(1-\Delta)^n\varphi_k(\xi,t)$ und

$$i(2\pi)^{n/2}\, T[\varphi_k] = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-n} \int_0^\infty e^{-it|\xi|^2}\mathcal{F}_x(1-\Delta)^n\varphi_k(\xi,t)\,dt\,d\xi .$$

Aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes reicht es nun z.z., dass das innere Integral gleichmäßig (in ξ) gegen Null konvergiert. Dazu schätzen wir ab:

$$\left|\int_0^\infty e^{-it|\xi|^2}\mathcal{F}_x(1-\Delta)^n\varphi_k(\xi,t)\,dt\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_x(1-\Delta)^n\varphi_k(\xi,t)|\,dt$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |(1-\Delta)^n\varphi_k(x,t)|\,dx\,dt \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Riemann-}\\ \text{Lebesgue}\end{array}\right)$$

$$\le \omega_{n+1}\cdot R^{n+1}\,\|(1-\Delta)^n\varphi_k\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty).$$

Damit ist der Nachweis der Stetigkeit von T erbracht.

(2) Für $L = i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ ist $L^* = -i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ und wir haben

$$T[L^*\psi] = \frac{-i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\psi(\xi,t)\,dt\,d\xi$$

$$\overset{\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}{=} \frac{-i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-it|\xi|^2} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - |\xi|^2\right) \mathcal{F}_x\psi(\xi,t)\,dt\,d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -\int_0^\infty \left(e^{-it|\xi|^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_x\psi(\xi,t) + \underbrace{(-i|\xi|^2)\, e^{-it|\xi|^2}}_{=\frac{\partial}{\partial t} e^{-it|\xi|^2}} \mathcal{F}_x\psi(\xi,t)\right) dt\,d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x\psi(\xi,t)\right) dt\,d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x\psi(\xi,0)\,d\xi = \psi(0,0),$$

wobei im letzten Schritt die Fourierinversionsformel verwendet wurde.

(3) In der angegebenen Def. ist wegen $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ die Integrationsreihenfolge vertauschbar und daher

$$T[\psi] = -i \int_0^\infty (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x\psi(\xi,t)\,d\xi\,dt$$

Fourierinversion $= -i \int_0^\infty \mathcal{F}_x^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x\psi(0,t)\,dt$

Lemma aus Abschnitt 3.2 $= -i \cdot \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|4\pi i t|}^{\,n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \psi(x,t)\,dx}_{S_t * \psi(0,t),\ \text{Faltung nur in } x.}\,dt$

Eine Lösung des Anfangswertproblems für die inhomogene freie Schrödinger-Gleichung erhalten wir wieder mit Hilfe des Duhamelschen Prinzips:

Satz 2: Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$, so dass die Abbildung

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)\, \mathcal{F}_x f(\xi,t)\, d\xi$$ stetig ist. Dann ist

$$u_p(x,t) := \frac{-i}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - it|\xi|^2 + is|\xi|^2} \mathcal{F}_x f(\xi,s)\, d\xi\, ds$$

$$= -i \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} S_{t-s}(x-y) f(y,s)\, dy\, ds$$

in $C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ und löst das Problem

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad u(x,0) = 0.$$

Bem.: (1) Hierbei ist $S_t(x) = \frac{1}{|4\pi i t|^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$.

(2) In der zweiten Darstellung kann die Integrationsreihenfolge nicht vertauscht werden.

(3) Eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$ erhält man, indem man zu u_p eine Lösung der homogenen Gleichung hinzuaddiert, die der Anfangsbedingung genügt.

Bew. (des Satzes): Die Voraussetzungen umfassen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_x f(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

ist und dass

$$f(\cdot,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\cdot\xi} \mathcal{F}_x f(\xi,t)\, d\xi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Daher liefert Lemma 3 in Abschnitt 3.2 die Übereinstimmung der beiden Darstellungen.

Die Gleichung $u_p(x,0) = 0$ ist offensichtlich.

Zu Regularität und Dgl.: Wie im Bew. von Satz 2 in Abschnitt 3.3 können wir x-Ableitungen und Integration vertauschen und erhalten

$$\Delta u_p(x,t) = \frac{-i}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (-|\xi|^2)\, e^{ix\xi - i(t-s)|\xi|^2} \mathcal{F}_x f(\xi,s)\, d\xi\, ds$$

(Die Existenz des Integrals wird durch die Voraussetzung "$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2) \mathcal{F}_x f(\xi,t)\, d\xi$ ist stetig" ja gerade sichergestellt.) Für die Zeitableitung müssen wir zusätzlich die variable obere Integralgrenze beachten:

$$i\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \mathcal{F}_x f(\xi,t)\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (-i|\xi|^2)\, e^{ix\xi - i(t-s)|\xi|^2} \mathcal{F}_x f(\xi,s)\, d\xi\, ds$$

Hierbei ist der erste Summand nach der Fourierinversionsformel gerade $= f(x,t)$, der zweite addiert sich mit $\Delta u_p(x,t)$ genau zu Null, also ist

$$i\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t) + \Delta u_p(x,t) = f(x,t). \qquad \square$$