3.3 Existenz (Homogene Gleichungen)

Wir führen zuerst den Begriff der approximativen Einheit ein:

Def.: Eine Familie $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ von Funktionen $K_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt eine approximative Einheit (oder Dirac-Folge), falls

(1) $\exists M > 0$, so dass $\forall \varepsilon > 0$ $\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\, dx \leq M$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\, dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$,

(3) $\forall \delta > 0$ ist $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\, dx = 0$.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ lassen sich approximative Einheiten leicht gewinnen, indem man eine beliebige L^1-Funktion $K \neq 0$ auf 1 normiert und reskaliert. Genauer:

Lemma 1: Sei $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\, dx = 1$ und, für $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Dann bildet die Familie $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit.

Bew.: (1) Mit der Subst. $y = \frac{x}{\varepsilon}$, d.h. $dx = \varepsilon^n dy$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} |K(\tfrac{x}{\varepsilon})|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |K(y)|\,dy =: M,$$

und ebenso sehen wir (2). Zu (3):

$$\int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\,dx = \varepsilon^{-n} \int_{|x|>\delta} |K(\tfrac{x}{\varepsilon})|\,dx$$

$$= \int_{|y|>\frac{\delta}{\varepsilon}} |K(y)|\,dy \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0),$$

nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. □

Bsp.: (1) Der "Wärmeleitungskern"

$$H_t(x) := (4\pi t)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

der sich im letzten Abschnitt für $\alpha = 1$ ergeben hat, ist eine approximative Einheit. (Wähle $K = H_1$ und $\varepsilon = \sqrt{t}$.)

Auch der etwas allgemeinere Kern
$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}^{\,n}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0$$
ist von dieser Bauart und also eine approx. Einheit.

(2) Der "Schrödinger-Kern"

$$S_t(x) := \sqrt{4\pi i t}^{\,-n} \cdot e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

(Fall $\alpha = i$ in 3.2) ist keine approximative Einheit, z.B. ist die Voraussetzung $\int_{\mathbb{R}^n} |S_t(x)|\,dx \le M$ nicht erfüllt.

(3) Den Poissonkern des oberen Halbraums haben Sie in den Übungen berechnet zu

$$P_H(y,x) = \frac{2y_n}{\omega_n} |x-y|^{-n} .$$

Ersetzt man hierin n durch $n+1$ und ersetzt die $n+1$-te Komponente durch $\varepsilon > 0$, erhält man mit

$$P_\varepsilon(x) = \frac{2\varepsilon}{\omega_{n+1}} \left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

eine approximative Einheit. Das Normierungsintegral haben Sie nachgerechnet. (Faltet man $P_\varepsilon * f(x)$, erscheint wieder die Differenz $x-y$ im Argument von P_ε.)

<u>Lemma</u> 2 (Approximationslemma): Es sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit. Dann gilt in jedem Stetigkeitspunkt x von f, dass

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} K_\varepsilon * f(x) = f(x).$$

Ist f glm. stetig, so gilt $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} K_\varepsilon * f = f$ mit glm. Konvergenz.

Bew.: Zunächst einmal gilt für alle beschränkten Funktionen f, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, dass

$$|K_\varepsilon * f(x) - f(x)| \underset{(2)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x-y)(f(y)-f(x))\,dy \right|$$

$$\leq \int_{|x-y|\leq\delta} |K_\varepsilon(x-y)||f(y)-f(x)|\,dy + \int_{|x-y|\geq\delta} |K_\varepsilon(x-y)||f(y)-f(x)|\,dy\,.$$

Nun sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Stetigkeitspunkt von f und $\varepsilon_0 > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $\delta = \delta(x) > 0$, so dass $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon_0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y-x| \leq \delta$. Für dieses δ ist dann

$$\int_{|x-y|\leq\delta} |K_\varepsilon(x-y)|\,|f(y)-f(x)|\,dy \underset{(1)}{\leq} \varepsilon_0 \cdot M$$

und

$$\int_{|x-y|\geq\delta} |K_\varepsilon(x-y)|\,|f(y)-f(x)|\,dy \leq 2\|f\|_\infty \cdot \int_{|x-y|\geq\delta} |K_\varepsilon(x-y)|\,dy$$

$$= 2\|f\|_\infty \cdot \int_{|z|\geq\delta} |K_\varepsilon(z)|\,dz\,.$$

Laut der Eigenschaft (3) einer approximativen Eins folgt

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |K_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon_0 \cdot M.$$

Da $\varepsilon_0 > 0$ hierbei beliebig war, also

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f(x) = f(x).$$

Wenn f auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist, finden wir zu $\varepsilon_0 > 0$ sogar unabhängig von $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon_0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-y| \leq \delta$. Abschätzung wie oben ergibt dann

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |K_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon_0 \cdot M + 2\|f\|_\infty \int_{|z| \geq \delta} |K_\varepsilon(z)| \, dz$$

und also $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |K_\varepsilon * f(x) - f(x)| = 0$. □

Lemma 3: Für $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$ sei

$$w(x,t) = t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}.$$

Dann ist $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ und löst die Dgl.

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \alpha \Delta w(x,t).$$

Im Fall $\operatorname{Re}\alpha > 0$ gelten für die partiellen Ableitungen die Abschätzungen

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x_j}(x,t)\right| \leq C_{n,\alpha} t^{-\frac{n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{8|\alpha|^2} \frac{|x|^2}{t}},$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\right| + \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x,t)\right| \leq C_{n,\alpha} t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{8|\alpha|^2} \frac{|x|^2}{t}}.$$

Bew.: $\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} + t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} \cdot \frac{|x|^2}{4\alpha t^2}$

$$= t^{-\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} \left(-\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4\alpha t}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} \cdot \left(-2\frac{x_j}{4\alpha t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x,t) = t^{-n/2}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}\cdot\left(\left(-2\,\frac{x_j}{4\alpha t}\right)^2 - \frac{2}{4\alpha t}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot t^{-n/2-1}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}\left(\frac{x_j^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2}\right).$$

Summation über j ergibt

$$\Delta w(x,t) = \frac{1}{\alpha}\, t^{-\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}\left(\frac{|x|^2}{4\alpha t} - \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial w}{\partial t}(x,t).$$

Die Abschätzungen im Fall $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ergeben sich aus $\sup\limits_{z>0} z^k e^{-\varepsilon z^2} \leq C_{k,\varepsilon}$ $(k\in\mathbb{N}, \varepsilon>0)$, also z.B.

$$\left|\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\right| \leq t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha\,|x|^2}{4|\alpha|^2 t}}\left(\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4|\alpha| t}\right)$$

$$\leq t^{-\frac{n}{2}-1}\cdot C_{n,\alpha}\cdot e^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha\,|x|^2}{8|\alpha|^2 t}}.$$ $\square$

Für die Wärmeleitungsgleichung erhalten wir mit $\alpha = 1$ und $H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ den folgenden

Existenzsatz:

Satz 1: Es sei $u_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit $|u_0(x)| \leq M$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x) & : t=0 \\ H_t * u_0(x) & : t>0. \end{cases}$$

Dann ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ und löst das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t); \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

Bew.: Für $t>0$ haben wir

$$u(x,t) = H_t * u_0(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy.$$

Die Funktion $(x,t) \mapsto H_t(x)$ ist unendlich oft differenzierbar mit

$$\left(\nabla_x, \frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta H_t(x) = P_\beta\left(x, \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

(wobei P_β ein Polynom ist) und löst nach Lemma 3 die Wärmeleitungsgleichung. Die Funktion

$$F(y) = \sup\left\{ \left|P_\beta\left((x-y), \frac{1}{t}\right)\right| \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \cdot M : \varepsilon_0 \le t \le R,\ |x| \le K \right\}$$

ist für feste $\varepsilon_0, R, K > 0$ aufgrund des Exponentialfaktors integrierbar (vgl. Abschätzungen in Lemma 3!). Der Lebesguesche ~~Integral~~ Konvergenzsatz erlaubt jetzt, beliebig oft unter dem Integral zu differenzieren. Es folgt

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) \quad (t>0).$$

$u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ folgt aus dem Approximationslemma, $u(x,0) = u_0(x)$ gilt p.d. $\square$

Bem.: Unter der Voraussetzung "u_0 ist stetig und beschränkt" haben wir eine (in der Zeitvariable t) globale Lösung erhalten. Setzt man lediglich

$|u_0(x)| \leq M \cdot e^{c|x|^2}$ voraus, so erhält man durch Faltung mit H_t immer noch eine zeitlich lokale Lösung, die i.a. in endlicher Zeit "explodiert". (Bsp. dazu in den Übungen)

Auch das Cauchy-Problem für die freie Schrödinger-Gleichung wird durch die Faltung

$$u(x,t) = S_t * u_0(x)$$

mit dem entsprechenden Integralkern

$$S_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \cdot e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

gelöst. Da die Funktionenschar $(S_t)_{t>0}$ keine approximative Einheit ist, bereitet die Modifikation der Argumentation bei der WLG erhebliche Schwierigkeiten. Die Differentiation unter dem Integral lässt sich durch stärkere Voraussetzungen an die Daten, etwa

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)\,|u_0(x)|\,dx < \infty$$

noch rechtfertigen. Nicht trivial ist hingegen die Stetigkeit der Lösung in $t=0$ ("Konvergenz der Lösung gegen die Daten"). Aber mit Hilfe der Fouriertransformation kommen wir erfreulich einfach zum Ziel.

Satz 2: Es sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)\,|\hat{u}_0(\xi)|\,d\xi < \infty$.

Dann ist durch

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)\,d\xi$$

eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ des Cauchy-Problems

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \Delta u(x,t) = 0 \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

gegeben. u ist nach den Ortsvariablen zweimal stetig differenzierbar und für $t \neq 0$ gilt

$$u(x,t) = S_t * u_0(x).$$

Bem. In der Voraussetzung $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)\,|\hat{u}_0(\xi)|\,d\xi < \infty$ ist $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ enthalten, s.u..

Bew.: Für $t=0$ ist $u(x,0) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}_0(x) = u_0(x)$ und die Stetigkeit in der Zeitvariablen folgt aus

$$u(x,t+h) - u(t,x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\left(e^{-i(t+h)|\xi|^2} - e^{-it|\xi|^2}\right)\hat{u}_0(\xi)\,d\xi \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, denn der Integrand konvergiert für $h \to 0$ punktweise gegen Null, und mit $2\,|\hat{u}_0(\xi)|$ ist eine nach Voraussetzung integrierbare Majorante gegeben. Das gilt insbesondere für $t=0$.

Dividieren wir die letzte Formelzeile durch $h \neq 0$, so ergibt sich

$$\frac{1}{h}\left(u(x,t+h)-u(x,t)\right)$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\cdot\frac{1}{h}\left(e^{-i(t+h)|\xi|^2}-e^{-it|\xi|^2}\right)\hat{u}_0(\xi)\,d\xi$$

Der Integrand geht punktweise gegen

$$e^{ix\xi}\cdot(-i|\xi|^2)e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

und wird wegen

$$\left|\frac{1}{h}\left(e^{-i(t+h)|\xi|^2}-e^{-it|\xi|^2}\right)\right|\leq|\xi|^2 \qquad \text{(MWS)}$$

majorisiert durch $|\xi|^2|\hat{u}_0(\xi)|$, was nach Vor. integrierbar ist. Der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-it|\xi|^2}|\xi|^2\hat{u}_0(\xi)\,d\xi.$$

Dies ist eine stetige Funktion von x und t (noch-mal Lebesgue!). Für die partiellen Ableitungen nach den Raumvariablen verfahren wir ebenso und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-it|\xi|^2}(i\xi_j)\,\hat{u}_0(\xi)\,d\xi$$

und weiter

$$\Delta u(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-it|\xi|^2}(-|\xi|^2)\hat{u}_0(\xi)\,d\xi,$$

so dass $i\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\Delta u(x,t)=0$. Auch alle gemischten zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-it|\xi|^2} (-\xi_j \xi_k) \hat{u}_0(\xi)\, d\xi$$

sind stetig auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Die Behauptung

$$u(x,t) = S_t * u_0(x)$$

folgt für $t>0$ aus Lemma 3 in Abschnitt 3.2 und hieraus auch für $t<0$ durch komplexe Konjugation (→ Übungsaufg., nicht sehr umfangreich). □

Diskussion: (1) Dieser Satz wird zumeist unter der Voraussetzung $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ formuliert, wobei

$$S(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \nabla^\gamma f(x)| < \infty \ \forall\, \beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^n \}$$

der Raum der schnell fallenden Funktionen ist. (Auch: "Schwartz-Raum", nach Laurent Schwartz, $S(\mathbb{R}^n)$ spielt in der Theorie der Distributionen eine fundamentale Rolle.) Das ist eine weitaus stärkere Voraussetzung als nötig, hat aber den Vorteil, dass dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ ist.

(2) Es gehört zu den Axiomen der QM, dass ein physikalischer Zustand (wie u_0 oder $u(\cdot,t)$) Element eines Hilbertraumes ist. Das ist unter unseren Voraussetzungen an u_0 aber auch unter $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ nicht gut erreichbar. Ein möglicher Ausweg: Man verzich-

(153)

let auf die Voraussetzung $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^4)$ und damit auf die Darstellung $u(x,t) = S_t * u_0(x)$. Andererseits verlangt man, dass u_0 im L^2-basierten Sobolevraum

$$H^s(\mathbb{R}^4) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^4) : \langle f, f \rangle_s < \infty \} \qquad (s \geq 0)$$

liegt. Das ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_s := \int_{\mathbb{R}^4} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi ,$$

wobei $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Für $s > \frac{4}{2} + 2$ ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^4} \langle \xi \rangle^2 |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^4} \langle \xi \rangle^{-s+2} \langle \xi \rangle^{s-2} \langle \xi \rangle^2 |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

$$\underset{C.S.}{\leq} \left(\int \langle \xi \rangle^{-2s+4} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = C_s \|f\|_{H^s}.$$

D.h. die Vor. $\int_{\mathbb{R}^4} \langle \xi \rangle^2 |\hat{u}_0(\xi)| d\xi < \infty$ ist für $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^4)$ mit $s > \frac{4}{2} + 2$ erfüllt.

(3) Ist $\hat{u}(\xi, t) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$, so ist aufgrund der Parsevalschen Gleichung $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$.

Andererseits haben wir für $u(x,t) = S_t * u_0(x)$, dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C \cdot |t|^{-\frac{4}{2}} \|u_0\|_{L^1}$$

Hieraus lässt sich durch Interpolation (→ Harmonische Analysis) folgern, dass für $1 \leq p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p'}} \leq C\,|t|^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\,\|u_0\|_{L^p}\,.$$

Hieraus erhält man Raum-Zeit-Abschätzungen des Typs

$$\|u\|_{L^p_t L^q_x} = \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\,\|u_0\|_{L^2}$$

(Strichartz, 1977). Solche Abschätzungen sind mittlerweile fundamental für die Untersuchung nichtlinearer Schrödinger- und anderer Wellengleichungen geworden. (Mehr dazu $\rightarrow$ PDE II)