3.2 Integraldarstellung der Lösung des Cauchy-Problems

Wir starten mit der Berechnung der Fouriertransformierten der (speziellen) Gaussfunktion

$$G_\beta(x) = e^{-\beta\frac{|x|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei sei $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\beta > 0$, so dass $G_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, ebenso alle Ableitungen von G_β.

Lemma 1: Es bezeichne $\sqrt{\ }$ den Hauptzweig der komplexen Wurzel. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \sqrt{z} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}}\, dx$$

holomorph auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ und es gilt $f'(z) = 0$.

Bew.: Wegen $\operatorname{Re} z > 0$ kann der zweite Faktor unter dem Integral differenziert werden und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}} dx + \sqrt{z} \cdot \int_{\mathbb{R}} -\frac{x^2}{2} \cdot e^{-z\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}} x \cdot \underbrace{\left(-zx \cdot e^{-z\frac{x^2}{2}}\right)}_{= \frac{\partial}{\partial x} e^{-z\frac{x^2}{2}}} dx$$

$$\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \frac{1}{2\sqrt{z}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}} dx - \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial}{\partial x} x\Big) \cdot e^{-z\frac{x^2}{2}} dx \Big) = 0.$$

Die Funktion f ist also konstant auf der rechten Halbebene. Es gibt also ein $C \in \mathbb{C}$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z\frac{x^2}{2}}dx = \frac{C}{\sqrt{z}} \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Nun ist aus Analysis III bekannt, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}, \quad \text{also} \quad C = \sqrt{2\pi}, \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist $G_\beta(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\beta\frac{x_j^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Der Satz von Fubini ergibt dann die

Folgerung: $(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} G_\beta(x)dx = \widehat{G_\beta}(0) = \sqrt{\beta}^{-n}$.

Lemma 2: $\widehat{G_\beta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta}^{n}} \cdot e^{-\frac{|\xi|^2}{2\beta}}$.

Bem.: Die Fouriertransformierte einer Gaussfunktion des betrachteten Typs ist also (das Vielfache) einer Gaussfunktion. Insbesondere ist G_1 ein Eigenvektor der Fouriertransformation zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Bew.: Mit dem Satz von Fubini kann man die Bel. auf den Fall $n=1$ reduzieren. Wir leiten eine gewöhnliche Dgl. für $\widehat{G}_\beta$ her:

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{G}_\beta(\xi) = \frac{d}{d\xi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\,e^{-\beta\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -ix\cdot e^{-ix\xi}\cdot e^{-\beta\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{i}{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\,\underbrace{(-\beta x)\cdot e^{-\beta\frac{x^2}{2}}}_{=\frac{d}{dx}e^{-\beta\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

part. Int., Randterme fallen weg

$$\overset{}{=} -\frac{i}{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-ix\xi}\right)\cdot e^{-\beta\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{\xi}{\beta}\cdot\widehat{G}_\beta(\xi)$$

Diese hat die allgemeine Lösung $\widehat{G}_\beta(\xi) = C\cdot e^{-\frac{\xi^2}{2\beta}}$.
Aufgrund der Folgerung aus Lemma 1 ist $C = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. $\square$

Nun sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha\,\Delta u(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

wobei $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$. Weiter setzen wir voraus:

(1) $\forall t\geq 0$ ist $u(\cdot,t), \Delta u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

(2) Die $L^1(\mathbb{R}^n)$-wertige Abbildung $t\mapsto u(\cdot,t)$

ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}(u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0 .$$

(Die partielle Ableitung stimmt mit der "Banachraum-ableitung" überein.)

Dann ergibt die Anwendung der Fouriertransformation in den Raumvariablen <u>bei festem $t\geq 0$</u>:

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t) = -\alpha|\xi|^2\hat{u}(\xi,t); \qquad \hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_0(\xi).$$

Aufgrund des Riemann-Lebesgueschen Lemmas ist

$$\left|\frac{1}{h}(\hat{u}(\xi,t+h)-\hat{u}(\xi,t)) - \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t)\right|$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \left\|\frac{1}{h}(u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)) - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

letztres nach Voraussetzung (2), so dass

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\hat{u}(\xi,t+h)-\hat{u}(\xi,t)) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi,t).$$

Damit erhalten wir <u>bei festem $\xi\in\mathbb{R}^n$</u> für die Funktion

$$t\mapsto \hat{u}(\xi,t)$$

die gewöhnliche Dgl.

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\xi,t) = -\alpha|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)$$

mit der Anfangsbedingung $\hat{u}(\xi,0)=\hat{u}_0(\xi)$.

Die eindeutige Lösung hiervon ist

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\alpha t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi). \qquad (*)$$

Soweit funktioniert das unter den genannten Voraussetzungen an u auch für $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, also für die Schrödingergleichung. Wir bemerken schon hier einen wesentlichen Unterschied:

WLG ($\alpha = 1$)	SG ($\alpha = i$)
$\lvert\hat{u}(\xi, t)\rvert = e^{-t\lvert\xi\rvert^2} \lvert\hat{u}_0(\xi)\rvert$	$\lvert\hat{u}(\xi, t)\rvert = \lvert\hat{u}_0(\xi)\rvert$

und mit der Parsevalschen Gleichung

$\lVert u(\cdot, t)\rVert_2 \leq \lVert u_0\rVert_2$ mit einem exponentiellen Abfall, wenn $B_\varepsilon(0) \cap \operatorname{supp} \hat{u}_0 = \emptyset$	$\lVert u(\cdot, t)\rVert_2 = \lVert u_0\rVert_2$, Erhaltung der L^2-Norm entsprechend der physikalischen Interpretation von u.

Für die Rücktransformation von $(*)$ können wir im Fall $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ den Faltungssatz verwenden, denn dann ist für jedes $t > 0$ die Fkt.

$$\xi \longmapsto e^{-\alpha t|\xi|^2}$$

sowohl in $L^2(\mathbb{R}^n)$ wie auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\hat{g_t}(\xi) = e^{-\alpha t|\xi|^2}$ und haben nach $(*)$

$$\hat{u}(\xi,t) = \widehat{g_t}(\xi)\cdot\widehat{u_0}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\cdot\widehat{g_t * u_0}(\xi),$$

also $\quad u(x,t) = (2\pi)^{-n/2}\cdot g_t * u_0(x).$

Die Funktion g_t können wir mit der Inversionsformel bestimmen:

$$g_t(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\cdot e^{-\alpha t|\xi|^2}\,d\xi \qquad \text{Subst } \xi\mapsto -\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, e^{-2\alpha t\cdot\frac{|\xi|^2}{2}}\,d\xi$$

$$\underset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}^{\,n}}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}}.$$

Insgesamt also für $t>0$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}^{\,n}}\cdot\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}}\,u_0(y)\,dy.$$

Zu demselben Ergebnis kann man auch im Schrödinger-Fall gelangen, also für $\alpha = i$. In diesem Fall ist allerdings die Funktion

$$\widehat{g_t}(\xi) = e^{-it|\xi|^2}$$

lediglich beschränkt (mit $|\widehat{g_t}(\xi)| = 1$) und zu keiner Potenz integrierbar. Der Faltungssatz steht nicht zur Verfügung und man muss die Voraussetzung $\hat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ hinzufügen, um zum Ziel zu gelangen:

Lemma 3: Es seien $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy \qquad \text{und}$$

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-it|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi). \qquad (t>0)$$

Dann ist $u = v$.

Bew.: Für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha > 0$ und

$$u_\alpha(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}^{\,n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\alpha t}} u_0(y)\,dy$$

haben wir gesehen, dass

$$\hat{u_\alpha}(\xi,t) = e^{-\alpha t|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi).$$

Jetzt schreiben wir

$$|v(x,t)-u(x,t)| \le |v(x,t)-u_\alpha(x,t)| + |u_\alpha(x,t)-u(x,t)| =: I_\alpha + II_\alpha.$$

Nun ist

$$\lim_{\alpha\to i} u_\alpha(x,t) = \lim_{\alpha\to i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}^{\,n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t\alpha}} u_0(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes mit Majorante $|u_0|$, da $\left|e^{-\frac{|x-y|^2}{4t\alpha}}\right| \leq 1$. Also ist 14.1a

$\lim\limits_{\alpha\to i} I_\alpha = 0$. II_α schätzen wir folgendermaßen ab:

$$|u_\alpha(x,t) - u(x,t)| \leq \left\| \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(u_\alpha(\cdot,t) - u(\cdot,t)\right)\right\|_{L^\infty_x}$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \left\| \hat{u}_\alpha(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\right\|_{L^1_\xi}$$ Riemann-Lebesgue, angewendet auf $\mathcal{F}^{-1}$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\alpha t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) - e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)\right| d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left| e^{-\alpha t|\xi|^2} - e^{-it|\xi|^2}\right|}_{\leq 2} |\hat{u}_0(\xi)|\, d\xi \xrightarrow[\alpha\to i]{} 0,$$

ebenfalls aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes, diesmal mit Majorante $2|\hat{u}_0|$. □