2.8 Das Dirichlet-Problem für die Poissongleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Dirichlet-Gebiet, das den Voraussetzungen des Gaussschen Satzes genügt. Es soll die Existenz einer Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega) \qquad (DPP)$$

unter möglichst schwachen Regularitätsvoraussetzungen an $f: \Omega \to \mathbb{R}$ gezeigt werden.

Was ist bereits bekannt?

(1) Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung folgt aus dem schwachen Maximumprinzip.

(2) Den Fall $f = 0$ haben wir mit Hilfe des Perron-Verfahrens im letzten Abschnitt geklärt.

(3) Die Greensche Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) G(y,x) \, dS_x$$

$$+ \int_{\Omega} G(y,x) f(x) \, dx$$

mit einer Grundlösung G zeigt an, wie eine Lösung aussehen muss. Insbesondere erhalten wir für $f \in C_0^2(\Omega)$ (kompakter Träger $\operatorname{supp} f \subset \Omega$) eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (ohne Berücksichtigung der Randwerte) durch

$w = N_0 * f$, wobei

$$N_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & : n = 2 \\ \frac{-1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & : n \geq 3 \end{cases}$$

das Newton-Potential (einer Punktmasse) ist.

Daraus ergibt sich die folgende Vorgehensweise:

(1) Man setzt $w(x) := \int_\Omega N_0(x-y) f(y)\, dy$, das ist das <u>Newton-Potential zu f</u> (physikalisch: das von einer Masse der Dichte f erzeugte Gravitationspotential), und untersucht, unter welchen Voraussetzungen an f $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Poissongleichung löst.

(2) Zu gegebenem $g \in C(\partial\Omega)$ wählt man

$$h := g - w\big|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega).$$

Dann existiert eine Lösung $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von $\Delta v = 0$ in Ω, $v\big|_{\partial\Omega} = h$.

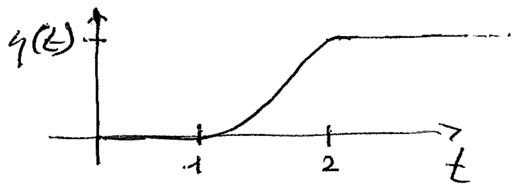
Mit $u = v + w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ist dann die gesuchte Lösung von (DPP) gefunden.

Nur für (1) ist noch etwas zu tun. Dabei versuchen wir, durch Approximation das Problem auf den Fall $f \in C_0(\Omega)$ zurückzuführen. Dazu führen wir eine Abschneidefunktion

η mit den folgenden Eigenschaften ein:

(i) $\eta : [0,\infty) \to [0,1]$ ist stetig diff'bar mit

$$0 \leq \eta'(t) \leq 2 \quad \forall t \in [0,\infty)$$



(ii) $\eta(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$, $\eta(t) = 1 \quad \forall t \geq 2$.

Lemma 1: Es seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt sowie w das Newton-Potential von f. Dann gilt $w \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und für $x \in \Omega$ ist

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial N_0}{\partial x_j}(x-y) f(y)\, dy .$$

Bew.: Wir setzen $w_\varepsilon(x) := \int_\Omega N_0(x-y)\, \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy$.

Dann ist $w_\varepsilon \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes, und es gelten

(i) Für $x \in \bar{\Omega}$:

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| = \left| \int_\Omega N_0(x-y) \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(x)} |N_0(y-x)|\, dy = \|f\|_\infty \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |N_0(y)|\, dy \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz (die zuletzt angegebene Schranke ist offenbar unabhängig von x). Hieraus folgt $w \in C(\bar{\Omega})$.

(ii) Für $x \in \Omega$: $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(N_0(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) f(y)\,dy.$ 118

Wir setzen $w_j(x) := \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} N_0(x-y)\right) f(y)\,dy$. Da $f \in L^\infty(\Omega)$ und $\nabla_x N_0(x-y) \sim |x-y|^{1-n}$, existiert das Integral.

Jetzt zeigen wir, dass

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = w_j(x) \quad \text{mit \underline{glm.} Konvergenz.}$$

Dann folgt die stetige Diff'barkeit von w und die Gleichung $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x) = w_j(x) = \int_\Omega \frac{\partial N_0}{\partial x_j}(x-y) f(y)\,dy.$

Nun ist

$$\left| w_j(x) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(N_0(x-y)\left(1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\right) f(y)\,dy \right|$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \frac{|x-y|^{1-n}}{\omega_n} + \underbrace{\frac{|x-y|^{2-n}}{(n-2)\,\omega_n}}_{n=2:\ \frac{1}{2\pi}\ln(|x-y|)} \cdot \frac{2}{\varepsilon}\,dy$$

$$= \|f\|_\infty \int_{B_{2\varepsilon}(0)} \frac{|y|^{1-n}}{\omega_n} + \frac{|y|^{2-n}}{(n-2)\,\omega_n} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\,dy \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

bzw. $\ln(\,)$ für $n=2$

$\square$

Ohne weitere Voraussetzung an f wird die zweite Ableitung des Newton-Potentials i. allg. nicht existieren. Auch die Stetigkeit von f erweist sich hierfür als unzureichend. Man benötigt:

<u>Def.</u>: Eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt lokal Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, falls zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ eine Konstante $C = C(K)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in K.$$

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{ f \in C(\Omega) : f \text{ ist lokal Hölder-stetig zum Exponenten } \alpha \}$$

<u>Bem.</u>: (1) Im Fall $\alpha = 1$ nennt man diese Funktionen lokal Lipschitz-stetig. Aufgrund des Mittelwertsatzes gehören hierzu alle stetig differenzierbaren Funktionen.

(2) $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist ein Vektorraum. Dies und weitere einfache Eigenschaften $\to$ Übungen.

<u>Bsp.</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := |x|^{\frac{1}{2}}$

- f ist global (d.h. C kann unabhängig von K gewählt werden) Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha = \frac{1}{2}$, denn es gilt

$$\left| |x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{\big| |x| - |y| \big|}{|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|x-y|}{|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

- <u>lokal</u> ist f dann auch Hölder-stetig zu jedem kleineren Exponenten $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Denn ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so existiert ein $R > 0$, für das $K \subset \overline{B_R(0)}$, und wir haben die Abschätzung

$$\left| |x|^{\frac12} - |y|^{\frac12} \right| \leq |x-y|^{\frac12} \leq |x-y|^{\alpha} (2R)^{\frac12 - \alpha}.$$

- Hingegen ist f in keiner Nullumgebung Hölder-stetig zu einem Exponenten $\alpha > \frac12$. Wählen wir nämlich $y = \frac{x}{2}$, so ist

$$\frac{\left| |x|^{\frac12} - |y|^{\frac12} \right|}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{(1-\frac{1}{\sqrt2})\,|x|^{\frac12}}{2^{-\alpha}\,|x|^{\alpha}} = C_\alpha |x|^{\frac12-\alpha} \longrightarrow \infty \quad (x \to 0).$$

Lemma 2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genüge den Voraussetzungen des Gaussschen Satzes, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei lokal Hölder-stetig zu einem Exponenten $\alpha \in (0,1]$ und w das Newton-Potential von f. Dann ist $w \in C^2(\Omega)$ und für $x \in \Omega$ gilt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)(f(y)-f(x))\,dy$$

$$- f(x) \cdot \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y) \cdot \nu_j(y)\, dS_y$$

Insbesondere gilt $\Delta w(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Bem.: (1) Hierbei sind klassische Ableitungen in allen Punkten $x \neq y$ gemeint. Der Punkt $x = y$ (wo der Integrand nicht definiert ist) trägt nichts zum Integral bei.

(2) In diesem Sinne gilt insbesondere

$$\int_\Omega \Delta_x N_0(x-y)\,(f(y)-f(x))\,dy = 0,$$

so dass – wenn wir die Formel als bewiesen ansehen –

$$\Delta w(x) = -f(x)\cdot \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\cdot \nu_i(y)\,dS_y$$

$$= f(x)\cdot \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_y N_0(x-y), \nu(y)\rangle\, dS_y$$

$$= f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_0}{\partial \nu_y}(x-y)\cdot 1 - \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial \nu}}_{=0} N_0(x-y)\,dS_y = f(x)$$

nach der Greenschen Darstellungsformel mit $u \equiv 1$.

Bew. des Lemmas:

(1) Zuerst überzeugen wir uns davon, dass das Volumenintegral auf der rechten Seite aufgrund der Voraussetzung der Hölder-Stetigkeit von f existiert. Dazu beachten wir

$$\frac{\partial N_0}{\partial x_j}(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\cdot \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}$$

$$\frac{\partial^2 N_0}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\left\{ \frac{\delta_{ij}}{|x-y|^n} - \frac{n(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^{n+2}} \right\}$$

so dass

$$\left| \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\cdot (f(y)-f(x)) \right| \leq C_{n,f}\, |x-y|^{\alpha-n}$$

und das Integral

$$\int_{B_\varepsilon(x)} |x-y|^{\alpha-n}\, dy = \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon \underbrace{r^{n-1}}_{\text{von der Jacobi-Determinante}} \cdot \underbrace{r^{\alpha-n}}_{\text{vom Integranden}}\, dr$$

$= \omega_n \cdot \int_0^\varepsilon r^{\alpha-1}\, dr = \frac{\omega_n}{\alpha}\, \varepsilon^\alpha$ existiert nicht nur, sondern verschwindet auch mit $\varepsilon \to 0$.

(2) Wir wollen $V(x) := \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\, f(y)\, dy$ (letzteres nach Lemma 1) noch einmal "unter dem Integral differenzieren". Dazu benutzen wir noch einmal den cut-off und definieren

$$V_\varepsilon(x) := \int_\Omega \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy$$

$\left(\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \right.$ mit glm. Konvergenz, wie in Lemma 1 gezeigt wurde. $\left. \right)$

Dann ist

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) \cdot f(y)\, dy$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) \cdot (f(y) - f(x))\, dy$$

$$+ f(x) \cdot \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y) \cdot \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) dy =: I + II$$

Für II wählen wir ε so klein, dass $\partial B_{2\varepsilon}(x) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Dann ist

$$II = -f(x) \cdot \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) dy \qquad \text{jetzt: Gauss}$$

$$= -f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\,\underbrace{\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)}_{=1} \nu_j(y)\, dS_y \,.$$

(3)

Nun sei $u(x) := \int_\Omega \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)(f(y)-f(x))\, dy$

$$- f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\,\nu_j(y)\, dS_y$$

(Das ist unser "Kandidat" für $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x)$!)

Dann ist nach (2)

$$\left|u(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x)\right| = \left|\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(x-y)\left(1-\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\right)\right)(f(y)-f(x))\, dy\right|$$

$$\le C \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(x)} \left(|x-y|^{-n} + |x-y|^{1-n} \cdot \frac{2}{\varepsilon}\right) |f(y)-f(x)|\, dy$$

und wenn wir die Hölder-Stetigkeit von f ausnutzen

$$\ldots \le C \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(x)} |x-y|^{\alpha-n}\, dy \le C \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |y|^{\alpha-n}\, dy \xrightarrow[(\varepsilon\to 0)]{} 0$$

gleichmäßig in $x \in K \subset \Omega$ (wg. der Hölder-Bedingung).

Also haben wir: $\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)$ (glm.)

und $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = u(x)$ (lokal glm.)

Dann ist $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ nach x_j differenzierbar und es gilt $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}(x) = u(x)$. (Satz aus Ana I über die Ableitung von Funktionenfolgen bei glm. Konvergenz der Folge der Ableitungen!) $\square$

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts wird zusammengefasst in folgendem

<u>Satz</u> 1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Dirichlet-Gebiet, das den Voraussetzungen des Gaussschen Satzes genügt. Ferner seien $g \in C(\partial\Omega)$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal Hölder-stetig und beschränkt. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega \, ; \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

<u>Bem.</u>: Für diese Lösung kann gezeigt werden, dass alle zweiten Ableitungen lokal Hölder-stetig sind (zum selben Exponenten wie f). Dies erfordert jedoch mehr Aufwand als der Bew. von Satz 1. Einzelheiten dazu finden sich in

Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential equations of Second Order. Chap. 4.3