2.7 Das Perronsche Verfahren

auch: Methode der subharmonischen Funktionen,
nach: Oskar Perron, 1923.

Ziel: Allgemeiner Existenzsatz für das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$$

für beschränkte Gebiete Ω mit möglichst schwachen Regularitätsvoraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$.

Def.: Zu einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einer Funktion $g \in C(\partial\Omega)$ bildet man die Klasse

$$S_{g,\Omega} := \{ v \in C(\overline{\Omega}),\ v \text{ ist subharmonisch in } \Omega \text{ und } v\big|_{\partial\Omega} \leq g \}$$

der sog. "Sublösungen".

Erinnerung: subharmonisch bedeutet stetig und

$$\forall a \in \Omega\ \exists R = R(a) > 0, \text{ so dass } \forall r \in (0,R): u(a) \leq \fint_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x.$$

Für $u \in C^2(\Omega)$ äquivalent zu: $\Delta u(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$.

Bem.: (1) Es ist $m := \min\{g(x) : x \in \partial\Omega\} \in \mathbb{R}$. Setzen wir $v(x) := m \ \forall x \in \overline{\Omega}$, so ist $v \in S_{g,\Omega}$, also $S_{g,\Omega} \neq \emptyset$.

(2) Nach dem schwachen Maximumprinzip für subharmonische Funktionen gilt für alle $v \in S_{g,\Omega}$, dass $v(x) \leq M := \max\{g(x) : x \in \partial\Omega\} \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$u(x) := \sup\{v(x) : v \in S_{g,\Omega}\}$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$ wohldefiniert und durch M beschränkt.

Das Perron-Verfahren besteht aus zwei Schritten, die weitgehend unabhängig voneinander sind:

(1) Es wird gezeigt, dass $u = \sup\{v : v \in S_{g,\Omega}\}$ in Ω harmonisch ist. Hierfür sind die Eigenschaften des Randes $\partial\Omega$ unerheblich.

(2) Unter einer Regularitätsbedingung an $\partial\Omega$ wird gezeigt, dass $u\big|_{\partial\Omega} = g$ gilt. (Ist z.B. für $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$ nicht möglich, vgl. Übungen.)

Zu (1): Für $v \in C(\Omega)$ und $B_R(a) \subset \Omega$ definiert man

$$P_{a,R}v(y) := \begin{cases} v(y) & y \in \Omega \setminus B_R(a) \\ \dfrac{1}{R\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} v(x) \frac{R^2 - |y-a|^2}{|x-y|^n} \, dS_x & y \in B_R(a) \end{cases}$$

("harmonic lifting" von v)

$P_{a,R}v$ ist stetig in Ω und harmonisch in $B_R(a)$.

Lemma 1: Ist $v \in C(\Omega)$ subharmonisch, so gilt $v \le P_{a,R}v$ und $P_{a,R}v$ ist ebenfalls subharmonisch.

Bew.: (i) $v(y) \le P_{a,R}v(y)$ gilt mit $=$ für $y \in \Omega \setminus B_R(a)$. Für $y \in B_R(a)$ betrachten wir $w(y) := v(y) - P_{a,R}v(y)$. Dann ist w subharmonisch und es gilt $w\big|_{\partial B_R(a)} = 0$. Nach dem Maximumprinzip ist also $w(y) \le 0$ für alle $y \in B_R(a)$.

(ii) Da $P_{a,R}v$ in $B_R(a)$ harmonisch ist, ist die Mittelwertungleichung nur für $y \in B_R(a)^c \cap \Omega$ zu zeigen. Hierfür hat man, sofern $B_\delta(y) \subset \Omega$ ist,

$$P_{a,R}v(y) = v(y) \leq \fint_{\partial B_\delta(y)} v(x)\,dS_x \leq \fint_{\partial B_\delta(y)} P_{a,R}v(x)\,dS_x .$$

Lemma 2: Seien $v_1, \dots, v_N \in C(\Omega)$ subharmonisch und $v(x) := \max_{k=1}^{N} v_k(x)$. Dann ist v ebenfalls subharmonisch.

Bew.: Sei $y \in \Omega$. Dann existieren $k = k(y) \in \{1, \dots, N\}$ und ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle $\delta \in (0, \delta_0)$

$$v(y) = v_k(y) \leq \fint_{\partial B_\delta(y)} v_k(x)\,dS_x \leq \fint_{\partial B_\delta(y)} v(x)\,dS_x .$$

Satz 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g \in C(\partial\Omega)$ und $u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_{g,\Omega}\}$. Dann ist u in Ω harmonisch.

Bew.: Es reicht zu zeigen, dass u in einer beliebigen Kugel $B_R(a) \subset \Omega$ harmonisch ist. Fixieren wir also eine solche Kugel $B_R(a)$.

Per def. des Supremums gibt es eine Folge $(u_n)_n$ in $S_{g,\Omega}$, so dass

$$u(a) = \lim_{n\to\infty} u_n(a).$$

Um monotone Konvergenz zu erzwingen, setzen wir

$$v_n(y) = \max_{k=1}^{n} u_k(y).$$

Nach Lemma 2 sind die $v_n \in S_{g,\Omega}$, ebenso $P_{a,R} v_n$ (nach Lemma 1) und die Funktionenfolge $(P_{a,R} v_n)$ ist monoton steigend (auch nach Lemma 1). Ferner ist $P_{a,R} v(y) \leq M$ $(= \max_{\partial\Omega} g)$. Nach dem Harnack-schen Konvergenzsatz existiert

$$v(x) := \lim_{n\to\infty} P_{a,R} v_n(x)$$

und ist in $B_R(a)$ harmonisch. Bleibt zu zeigen:

$$\forall x \in B_R(a) \text{ ist } u(x) = v(x).$$

"$\geq$" ist klar, da $u(x) \geq P_{a,R} v_n(x)$ $\forall x \in B_R(a), n \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir also $v(x_0) < u(x_0)$ für ein $x_0 \in B_R(a)$ an. Dann gibt es $w_0 \in S_{g,\Omega}$ mit $v(x_0) < w_0(x_0) \leq u(x_0)$.

Nun wiederholen wir die obige Konstruktion und setzen $w_n(x) := \max\{w_0(x), v_n(x)\}$, $w(x) := \lim_{n\to\infty} P_{a,R} w_n(x)$.

Dann ist w harmonisch in $B_R(a)$ und es gilt $w(a) = v(a) = u(a)$ sowie $v(x) \leq w(x)$ $\forall x \in B_R(a)$.

$\Rightarrow$ $v - w$ ist in $B_R(a)$ harmonisch, ≤ 0 und nimmt ihr Maximum in $a \in B_R(a)$ an, wo $v(a) - w(a) = 0$ ist. Das Maximumprinzip ergibt $v \equiv w$ in $B_R(a)$ im Widerspruch zur Annahme $v(x_0) < w(x_0)$

$\square$

Zu (2) müssen wir zunächst die entscheidende Regularitäts-eigenschaft des Randes $\partial\Omega$ einführen:

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\xi \in \partial\Omega$.

(a) Eine Funktion $b \in C(\overline{\Omega})$ heißt eine Barriere in ξ bezüglich Ω, wenn gilt

(i) b ist superharmonisch in Ω,

(ii) $b(\xi) = 0$ und $b(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$.

(b) Wenn es eine solche Barriere in ξ gibt, nennt man ξ einen regulären Randpunkt von Ω.

(c) Ω heißt ein Dirichlet-Gebiet, wenn Ω beschränkt und jeder Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ regulär ist.

Bem.: Das Konzept der Barriere ist im folgenden Sinne lokal: Besitzt ein Punkt $\xi \in \partial\Omega$ für ein $\varepsilon > 0$ eine Barriere b_ε bezüglich $\Omega \cap B_\varepsilon(\xi)$, so ist bereits ξ ein regulärer Randpunkt von Ω. Dazu setzt man

$$m := \min\{b_\varepsilon(x) : \tfrac{\varepsilon}{2} \le |x-\xi| \le \varepsilon\} > 0$$

und

$$b(x) := \begin{cases} \min(m, b_\varepsilon(x)) & : x \in \overline{\Omega} \cap B_\varepsilon(\xi) \\ m & : x \in \overline{\Omega} \setminus B_\varepsilon(\xi) \end{cases}$$

Dann ist b eine Barriere in ξ bezüglich Ω.

(Begründung: $b(x) > 0 \;\; \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ und $b(\xi) = 0$ sind offensichtlich. Für die Stetigkeit ist zu beachten, dass $b\big|_{\frac{\varepsilon}{2} \le |x-\xi| \le \varepsilon} = m$ ist. Die Eigenschaft "superharmonisch" folgt aus Lemma 2.)

Satz 2: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $g \in C(\partial\Omega)$, $u = \sup\{v : v \in S_{g,\Omega}\}$ und $\xi \in \partial\Omega$ regulär. Dann gilt

$$\lim_{x \to \xi} u(x) = g(\xi).$$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $M := \max\{|g(x)| : x \in \partial\Omega\}$. Da g in ξ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega \text{ mit } |x - \xi| < \delta.$$

ξ ist regulär, also gibt es eine Barriere $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $b(y) > 0 \ \forall\, y \in \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$. Da b stetig und $\overline{\Omega} \setminus B_\delta(\xi)$ kompakt ist existiert ein $\sigma > 0$, so dass

$$b(y) \geq \sigma \quad \forall\, y \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(\xi).$$

Wir definieren für $y \in \overline{\Omega}$

$$u^{\pm}(y) := g(\xi) \pm \left(\varepsilon + \frac{2M}{\sigma} b(y)\right).$$

Dann ist u^+ superharmonisch und auf $\partial\Omega$ ist $g(x) \leq u^+(x)$, denn

(i) für $|x - \xi| \leq \delta$ ist $g(x) - g(\xi) \leq \varepsilon$ und

(ii) für $|x - \xi| \geq \delta$ ist $g(x) - g(\xi) \leq 2M \leq \frac{2M}{\sigma} \cdot b(x)$.

Ist nun $v \in S_{g,\Omega}$, so ist $v - u^+$ subharmonisch und $v - u^+|_{\partial\Omega} \leq 0$, nach dem Maximumprinzip also $v - u^+ \leq 0$ auf $\overline{\Omega}$, damit auch $u \leq u^+$ auf $\overline{\Omega}$.

Weiter ist u^- subharmonisch auf Ω und $u^-\big|_{\partial\Omega} \leq g$, so dass $u^- \in S_{g,\Omega}$ und damit $u^- \leq u$ auf $\bar{\Omega}$.

Zsf.: $-(\varepsilon + \frac{2M}{\delta} b(y)) \leq u(y) - g(\xi) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta} b(y)$

Wegen $\lim\limits_{y \to \xi} b(y) = 0$ ergibt sich hieraus

$$\limsup_{y \to \xi} |u(y) - g(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, also $\lim\limits_{y \to \xi} u(y) = g(\xi)$ bzw. $u(\xi) = g(\xi)$. $\square$

Satz 3: Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent: (1) Ω ist ein Dirichlet-Gebiet.

(2) Das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g \qquad \text{(DP)}$$

ist für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ lösbar.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2) Ist Ω ein Dirichlet-Gebiet, so ist jeder Randpunkt von Ω regulär. Dann wird nach den Sätzen 1 und 2 (DP) gelöst von $u := \sup\{v : v \in S_{g,\Omega}\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Wir wählen zu einem beliebigen $\xi \in \partial\Omega$ $g(x) = |x - \xi|$. Die Lösung u zu diesem Randwert ist in Ω harmonisch und in $\bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$ positiv nach dem starken Maximumprinzip. u ist also eine Barriere in ξ bezüglich Ω und somit ξ regulär. $\square$

Es gibt einige hinreichende Kriterien dafür, dass ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Dirichlet-Gebiet ist.

(1) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und streng konvex, so ist Ω ein Dirichlet-Gebiet.

Begründung: Von $\xi \in \partial\Omega$ können wir nach Verschiebung und Drehung annehmen, dass

(i) $\xi = 0$ und (ii) $\forall y = (y', y_n) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ gilt $y_n > 0$.

Dann ist $b(y) = y_n$ eine Barriere in ξ bezügl. Ω.

(2) Äußere Kugel- oder Poincarébedingung:

Ist $\xi \in \partial\Omega$ und $B_R(a)$ eine Kugel mit

$$\overline{B_R(a)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\},$$

so ist ξ ein regulärer Randpunkt von Ω. Hierzu wählt man ~~im wesentlichen das Negative der~~ die Greensche Funktion der Kugel, mit $x=a$, das ist für $y \in B_R(a)^c$

$$b(y) = C_n \begin{cases} R^{2-n} - |y-a|^{2-n} \\ \ln\left(\left|\frac{y-a}{R}\right|\right). \end{cases}$$

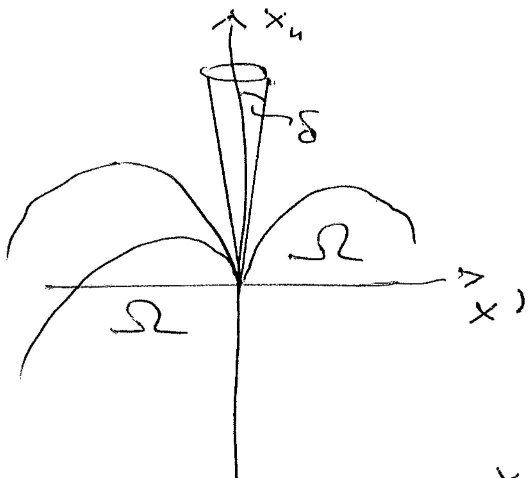
Diese Bedingung ist insbes. erfüllt, wenn $\partial\Omega$ in einer Umgebung von $\xi = (\xi', \xi_n)$ als Graph einer C^2-Funktion $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset B_\varepsilon(\xi') \to \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. In diesem Fall kann der Kehrwert des größten Eigenwertes von $\operatorname{Hess} \psi(\xi')$ als Radius der Kugel gewählt werden.

(3) Analog zur äußeren Kugelbedingung gilt eine äußere Kegelbedingung, die deutlich schärfer ist.

Satz 4: Es sei $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\xi \in \partial\Omega$. Es existiere ein Kegel $C_\xi \subset \Omega^c$, so dass $\overline{C_\xi} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$. Dann ist ξ ein regulärer Randpunkt von Ω.

Bem.: Der Öffnungswinkel $\delta > 0$ dieses Kegels mit Spitze in ξ kann beliebig klein sein.

Bew.: O.E. $\xi = 0$ und $C_\xi = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_n}{|x|} > \cos\delta\}$



Wir wählen

$$b(x) := \begin{cases} |x|^\varepsilon\left((1-\cos\delta)^{2-n} - \left(1 - \frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist $b(0) = 0$ und, für $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$

$$\frac{x_n}{|x|} < \cos\delta \Rightarrow 1 - \frac{x_n}{|x|} > 1 - \cos\delta \Rightarrow \left(1 - \frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n} < (1-\cos\delta)^{2-n}$$

$\Rightarrow b(x) > 0$, ferner $b \in C(\overline{\Omega})$

Zum Beweis, dass b superharmonisch ist, rechnen wir nach, dass $\Delta b(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$ ist, sofern $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ hinreichend klein gewählt wird.

$$\Delta\left(|x|^\varepsilon\left((1-\cos\delta)^{2-n}-\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}\right)\right)$$

$$=(\Delta|x|^\varepsilon)\left((1-\cos\delta)^{2-n}-\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}\right)$$

$$-2\left\langle\nabla|x|^\varepsilon,\nabla\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}\right\rangle-|x|^\varepsilon\Delta\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}=:I+II+III,$$

wobei (setze $r=|x|$)

$$I=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)r^\varepsilon\left((1-\cos\delta)^{2-n}-\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}\right)$$

$$=\varepsilon(\varepsilon+n-2)|x|^{\varepsilon-2}\left(\qquad \text{"} \qquad\right)$$

$$\leq\varepsilon(\varepsilon+n-2)|x|^{\varepsilon-2}(1-\cos\delta)^{2-n}.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^\lambda=-\lambda\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{\lambda-1}\cdot\left(\frac{\delta_{nj}}{|x|}-\frac{x_nx_j}{|x|^3}\right)$$

so dass

$$\nabla\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}=(n-2)\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n}\left(\frac{e_n}{|x|}-\frac{x_nx}{|x|^3}\right)\perp x$$

und damit wg. $\nabla|x|^\varepsilon=\varepsilon|x|^{\varepsilon-2}x$: $II=0$.

Nun zu III:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n}=(n-2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n}\cdot\left(\frac{\delta_{nj}}{|x|}-\frac{x_nx_j}{|x|^3}\right)\right)$$

$$=(n-2)\left\{(n-1)\cdot\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{-n}\left(\frac{\delta_{nj}}{|x|}-\frac{x_nx_j}{|x|^3}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n}\left(-\frac{2\delta_{nj}+1}{|x|^3}x_n+3\frac{x_nx_j^2}{|x|^5}\right)\right\}$$

$$=(n-2)\cdot\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{-n}\cdot\{\ \}_j$$

wobei

$$\{\}_j = (n-1)\left(\frac{\delta_{nj}}{|x|^2} - \frac{2\delta_{nj}x_n^2}{|x|^4} + \frac{x_n^2 x_j^2}{|x|^6}\right)$$

$$+ \left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)\left(\frac{3x_n x_j^2}{|x|^5} - \frac{2\delta_{nj}+1}{|x|^3}x_n\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\{\}_j = (n-1)\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{x_n^2}{|x|^4}\right) + \left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)\cdot\frac{(1-n)}{|x|^2}\cdot\frac{x_n}{|x|}$$

$$= \frac{n-1}{|x|^2}\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right), \quad \text{so dass}$$

$$\mathrm{III} = -|x|^{\varepsilon}\cdot\Delta\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{2-n} = -(n-2)(n-1)\,|x|^{\varepsilon-2}\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n}$$

und damit

$$\mathrm{I}+\mathrm{III} \leq |x|^{\varepsilon-2}\left(\varepsilon(\varepsilon+n-2)(1-\cos\delta)^{2-n} - (n-2)(n-1)\left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n}\right)$$

$$\leq |x|^{\varepsilon-2}\left(\varepsilon(\varepsilon+n-2)(1-\cos\delta)^{2-n} - (n-2)(n-1)\,2^{1-n}\right),$$

letzteres wegen $1-\frac{x_n}{|x|} \leq 2 \Rightarrow \left(1-\frac{x_n}{|x|}\right)^{1-n} \geq 2^{1-n}$.

Jetzt ist eine Wahl $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ möglich, so dass $\mathrm{I}+\mathrm{III} \leq 0$ wird. □

Etwas wesentlich besseres als die äußere Kegelbedingung lässt sich in höheren Raumdimensionen $n \geq 3$ kaum erreichen, wie das folgende Bsp. von H. Lebesgue aus dem Jahr 1913 zeigt:

Bsp.: Lebesgues Spitze

Es sei $S = [0,1] \times \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ und, für $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^3 \setminus S$

$$u(x) := \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(t-x_1)^2 + |x'|^2}} .$$

Dann ist u das Gravitationspotential einer auf S konzentrierten Masse der (Linien-)dichte $\varrho(t) = \frac{t}{\varsigma_3}$, und daher eine auf $\mathbb{R}^3 \setminus S$ harmonische Funktion. (Alternativ differenziere man unter dem Integral!)

Für $|x'| \neq 0$ sei

$$f(t) := \left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12} + x_1 \cdot \ln\left(t - x_1 + \left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12}\right).$$

Dann ist

$$f'(t) = \frac{t-x_1}{\left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{1/2}} + x_1 \frac{1}{t-x_1 + \left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{1/2}} \cdot \left(1 + \frac{t-x_1}{\left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{t}{\left((t-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{1/2}}$$

und daher auf $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \cdot e_1$

$$u(x) = f(1) - f(0) = \left((1-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12} - |x|$$

$$+ x_1 \cdot \ln\left(\frac{1 - x_1 + \left((1-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12}}{-x_1 + |x|}\right)$$

Um den logarithmischen Term etwas umzuschreiben, erweitern wir sein Argument

$$\frac{1 - x_1 + \left((1-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12}}{-x_1 + |x|} \cdot \frac{x_1 + |x|}{x_1 + |x|} \qquad \left(\begin{aligned}&(-x_1 + |x|)(x_1 + |x|)\\ &= |x|^2 - x_1^2 = |x'|^2\end{aligned}\right)$$

$$= \frac{1}{|x'|^2} \cdot \left(1 - x + \left((1-x_1)^2 + |x'|^2\right)^{\frac12}\right)(x_1 + |x|),$$

so dass

$$u(x) = \left((1-x_1)^2+|x'|^2\right)^{1/2} - |x| + x_1 \cdot \ln\left(\left(1-x_1+\left((1-x_1)^2+|x'|^2\right)^{1/2}\right)(x_1+|x|)\right)$$
$$- x_1 \cdot \ln(|x'|^2) =: A(x) - 2x_1 \cdot \ln(|x'|).$$

Hierbei gilt $\lim\limits_{x\to 0} A(x) = 1$, hingegen existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} -2x_1 \cdot \ln(|x'|)$$

nicht. Um dies einzusehen, wählen wir für $c>0$

$$|x'| = e^{-\frac{c}{2x_1}} \qquad (x_1>0).$$

Dann ist $-2x_1 \cdot \ln(|x'|) = -2x_1 \cdot \frac{-c}{2x_1} = c$. Nähert man sich also dem Nullpunkt auf einer der Rotationsflächen

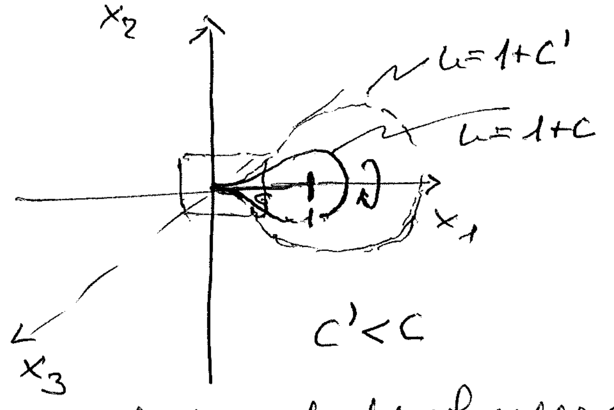
$$S_c = \{x=(x_1,x') \in \mathbb{R}^3 : x_1>0,\ |x'| = e^{-\frac{c}{2x_1}}\},$$

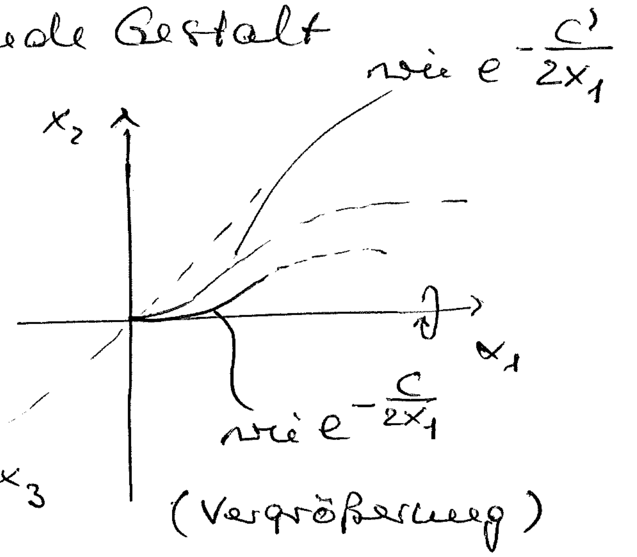
so gilt $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in S_c}} u(x) = 1+c.$ $\qquad (*)$

Die Niveauflächen von u, also

$$N_{1+c} := \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1>0,\ u(x)=1+c\}$$

haben ungefähr die folgende Gestalt





(u wächst mit abnehmendem Abstand zur Quelle S!)

(Vergrößerung)

Jetzt definieren wir

$$\Omega := B_1(0) \setminus \overline{\{x \in \mathbb{R}^3 \setminus S : u(x) > 2\}}$$

und betrachten das Dirichlet-Problem

$$\Delta v = 0 \text{ in } \Omega, \qquad v\big|_{\partial\Omega} = g$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 2 : x \in \partial\Omega : |x| < 1 \\ u(x) : x \in \partial\Omega : |x| = 1 . \end{cases}$$

Es kann nur eine Lösung dieses Problems geben, nämlich die Funktion u, mit der wir gestartet sind. Diese ist aber unstetig in $x_0 = 0$ wegen $(*)$, wenn wir darin $0 < c < 1$ wählen.

In zwei Dimensionen kann man die äußere Kegelbedingung noch zu einer „äußeren Streckenbedingung" verbessern, was sogar etwas einfacher ist als unsere Rechnung zur äußeren Kegelbedingung. Diese Möglichkeit werden wir in den Übungen diskutieren.