2.6 Der Poisson-Kern. Folgerungen aus dem Poisson-Integral (I)

Eine Integraltransformation der Form

$$Tg(y) = \int K(y,x)\, g(x)\, d\mu(x) \qquad (\mu \text{ ein Maß})$$

wird häufig als Fredholm-Operator bezeichnet. Die darin enthaltene Funktion K zweier Argumente nennt man einen Integralkern. (Speziell: Wenn K die Gestalt $K(y,x) = K_0(y-x)$ hat, spricht man von einem Faltungskern.) Diese Situation tritt auf in der Darstellung

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x)\, g(x)\, dS_x ,$$

auf die sich die Greensche Darstellungsformel reduziert, wenn G die Greensche Funktion (1. Art) von Ω und u eine Lösung des Dirichlet-Problems $u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$ für die Laplace-Gleichung ist. In diesem Fall nennt man $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ den Poisson-Kern des Gebietes Ω. Genauer:

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Es gebe eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge $N \subset \partial\Omega$, so dass $\partial\Omega \setminus N$ aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht. G_Ω sei die Greensche Funktion von Ω. Dann heißt die Abbildung

$$P_\Omega : \Omega \times (\partial\Omega \setminus N) \to \mathbb{R},\ (y,x) \mapsto P_\Omega(y,x) := \frac{\partial G_\Omega}{\partial \nu_x}(y,x)$$

der Poisson-Kern von Ω.

(Hierbei wird implizit die Voraussetzung $G_\Omega(y,\cdot) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus N)$ gemacht, ebenso die der Existenz der Greenschen Funktion.)

Lemma 1 (einfache Eigenschaften):

(1) Es ist $G_\Omega(y,x) \leq 0 \leq P_\Omega(y,x)$.

(2) Ist Ω beschränkt und $G(y,\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, so gilt $\int_{\partial\Omega} P_\Omega(y,x)\, dS_x = 1$.

Bew.: (1) Es ist $\lim_{x \to y} N_0(x-y) = -\infty$ und daher auch $\lim_{x\to y} G_\Omega(y,x) = -\infty$. Daher gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ gilt: $G_\Omega(y,x)\big|_{x \in \partial B_\varepsilon(y)} \leq 0$.
Wir setzen $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(y)$. Wegen

$$G_\Omega(y,x)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

ist dann auch $G_\Omega(y,x)\big|_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} \leq 0$. Da $G_\Omega(y,\cdot)$ in Ω_ε harmonisch ist, ergibt das Maximumprinzip: $G_\Omega(y,x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gemacht werden kann: $G_\Omega(y,x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \{y\}$

Nun ist für $y \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$

$$P_\Omega(y,x) = \frac{\partial G_\Omega}{\partial \nu_x}(y,x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\Big(\underbrace{G_\Omega(y,x)}_{=0} - G_\Omega(y, x-h\nu_x)\Big)$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-1}{h} G_\Omega(y, x-h\nu_x) \geq 0.$$

(2) Folgt aus $u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) P_\Omega(y,x)\, dS_x$ für $u=1$. $\square$

Satz 1: Der Poisson-Kern der Einheitskugel $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ist gegeben durch

$$P_B(y,x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}.$$

Bew.: (1) für $n \geq 3$. Für $y \neq 0$ ist die Greensche Funktion G_B von B gegeben durch

$$G_B(y,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n}\Big(|x-y|^{2-n} - (|y|\,|x-y'|)^{2-n}\Big).$$

Nun gilt für jedes $x \neq y$: $\frac{\partial}{\partial x_j} |x-y|^{2-n} = (2-n)\frac{x_j - y_j}{|x-y|^n}$

bzw. $\nabla_x |x-y|^{2-n} = (2-n)\cdot \frac{x-y}{|x-y|^n}$.

$$\Longrightarrow \quad \nabla_x (|y|\,|x-y'|)^{2-n} = (2-n)\cdot \frac{|y|^2}{|y|^n} \frac{x-y'}{|x-y'|^n}$$

Im Beweis für die Greensche Funktion der Einheitskugel (S. 72) haben wir bereits nachgerechnet, dass für $|x| = 1$ gilt $|y|\,|x-y'| = |x-y|$, also ist

$$\nabla_x G_B(y,x)\Big|_{|x|=1} = \frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{|x-y|^n}\left(x-y-(x|y|^2-y)\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{|x-y|^n}(1-|y|^2)\cdot x$$

und daher

$$P_B(y,x) = \frac{\partial G_B}{\partial \nu_x}(y,x)\Big|_{|x|=1} = \langle \nabla_x G_B(y,x), \nu_x\rangle\Big|_{|x|=1}$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\langle x,x\rangle\Big|_{|x|=1} = \frac{1}{\omega_n}\frac{1-|y|^2}{|x-y|^n}\Big|_{|x|=1}.$$

Aus dem Grund der Stetigkeit der Ableitung $\nabla_x G_B(\cdot,x)$ gilt dies auch für $y=0$.

(2) für $n=2$, wobei wir wieder $y\neq 0$ annehmen können. In diesem Fall ist

$$G_B(y,x) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln(|y-x|) - \ln(|y|\,|x-y'|)\right)$$

$$\Rightarrow \nabla_x G_B(y,x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{x-y'}{|x-y'|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{x|y|^2-y}{|y|^2|x-y'|^2}\right)$$ und für $|x|=1$ wg $|x-y| = |y|\,|x-y'|$

$$\ldots = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{x|y|^2-y}{|x-y|^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|y|^2}{|x-y|^2}\cdot x$$

Skalarprodukt mit $\nu_x = x$ ergibt also auch in diesem Fall die Behauptung.

$\square$

Bem.: (1) Verwendet man bei dieser Rechnung die Greensche Funktion einer beliebigen Kugel $B_R(a)$, so ist das Ergebnis

$$P_{B_R(a)}(y,x) = \frac{1}{R\omega_n} \frac{R^2-|y-a|^2}{|x-y|^n}.$$

Die Greensche Darstellungsformel liefert jetzt:
Ist $u \in C^2(\overline{B_R(a)})$ eine Lösung von $\Delta u = 0$, $u\big|_{\partial B_R(a)} = g$, so gilt für $|y-a|<R$:

$$u(y) = \frac{1}{R\omega_n} \cdot \int_{|x-a|=R} g(x) \frac{R^2-|y-a|^2}{|x-y|^n} \, dS_x$$

Durch Approximation schafft man das dann auch unter der Voraussetzung $u \in C^2(B_R(a)) \cap C(\overline{B_R(a)})$.

(2) In zwei Dimensionen wird der Poisson-Kern eines Kreises oft in Polarkoordinaten angegeben. Setzen wir $x = R\cdot e^{i\varphi}+a$, $y = r\cdot e^{i\vartheta}+a$, so wird $|x-y|^2 = R^2 - 2\operatorname{Re}\langle Re^{i\varphi}, re^{i\vartheta}\rangle + r^2$

$$= R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\vartheta) + r^2 \quad \text{und damit}$$

$$P_{B_R(a)}(y,x) = \frac{1}{R\omega_n} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}$$

Integriert man jetzt mit der Parametrisierung $x = R\cdot e^{i\varphi}+a$ über $\partial B_R(a)$ (beachte $dS_x = R\,d\varphi$)

so erhält man die Integraldarstellung

$$u(r\cdot e^{i\vartheta}+a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(Re^{i\varphi}+a)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\vartheta)+r^2}\,d\varphi .$$

Der nächste Satz liefert endlich die Existenz von Lösungen des Dirichlet-Problems für Kugeln:

Satz 2: Es sei $B_R(a)\subset\mathbb{R}^n$ die Kugel vom Radius $R>0$ um $a\in\mathbb{R}^n$, $g\in C(\partial B_R(a))$ und

$$u(y) = \begin{cases} g(y) & \text{für } |y-a|=R \\ \dfrac{1}{R\omega_n}\cdot\displaystyle\int_{\partial B_R(a)} g(x)\,\frac{R^2-|y-a|^2}{|x-y|^n}\,dS_x & \text{für } y\in B_R(a)\end{cases}.$$

Dann ist $u\in C^\infty(B_R(a))\cap C(\overline{B_R(a)})$ und löst das Dirichlet-Problem

$$\Delta u=0 \text{ in } B_R(a), \qquad u|_{\partial B_R(a)}=g .$$

Bem.: Eine solche Darstellung der Lösung nennt man das <u>Poisson-Integral</u>.

Bew.: (1) Regularität im Inneren und Dgl.

Sei $P(y,x)=\dfrac{1}{R\omega_n}\,\dfrac{R^2-|y-a|^2}{|x-y|^n}$. Dann ist die Abbildung

$$P: B_R(a)\times\partial B_R(a)\to\mathbb{R},\quad (y,x)\mapsto P(y,x)$$

beliebig oft nach y und es gilt

$$\Delta_y P(y,x) = \Delta_y\frac{\partial}{\partial\nu_x}G_{B_R(a)}(y,x) = \frac{\partial}{\partial\nu_x}\Delta_y G_{B_R(a)}(y,x)=0$$

Da $\partial B_R(a)$ kompakt ist, können wir beliebig oft unter dem Integral differenzieren. Dies ergibt

$$u \in C^\infty(B_R(a)) \quad \text{und} \quad \Delta_y u(y) = \int_{\partial B_R(a)} \Delta_y P(y,x)\, dS_x = 0$$

(2) $u \in C(\overline{B_R(a)})$ (Stetigkeit bis zum Rand)

Sei $y_0 \in \partial B_R(a)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(x) - g(y_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in \partial B_R(a)$ mit $|x - y_0| < \delta$.

Für $y \in B_R(a)$ mit $|y - y_0| < \frac{\delta}{2}$ erhalten wir

$$|u(y) - u(y_0)| = \Big| \int_{\partial B_R(a)} P(y,x) g(x)\, dS_x - g(y_0) \Big| \quad \Big(\int_{\partial B_R(a)} P(y,x)\, dS_x = 1 \Big)$$

$$\leq \int_{\partial B_R(a)} P(y,x)\, |g(x) - g(y_0)|\, dS_x$$

$$\leq \int_{\substack{\partial B_R(a) \\ |x-y_0|<\delta}} + \int_{\substack{\partial B_R(a) \\ |x-y_0| \geq \delta}} P(y,x)\, |g(x) - g(y_0)|\, dS_x =: I + II$$

mit $I \leq \varepsilon \cdot \int_{\partial B_R(a)} P(y,x)\, dS_x = \varepsilon$

und $II \leq 2 \|g\|_\infty \cdot \frac{1}{\omega_n R} \int_{|x-y_0| \geq \delta} \frac{R^2 - |y-a|^2}{|x-y|^n}\, dS_x$

Wegen $|x-y| \geq |x-y_0| - |y-y_0| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$

$$II \leq 2 \|g\|_\infty \cdot \frac{1}{\omega_n R} (R^2 - |y-a|^2) \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (y \to y_0)$$

Also: $\limsup_{y \to y_0} |u(y) - u(y_0)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$ $\square$