## 2.6 Der Poisson-Kern. Folgerungen aus dem Poisson-Integral (II)

Mit Hilfe des Poisson-Integrals können wir jetzt die Äquivalenz von Mittelwerteigenschaft und Harmonizität zeigen:

Satz 3: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C(\Omega)$, so dass die Mittelwerteigenschaft (MWE)

$$\forall\, B_R(a) \text{ mit } \overline{B_R(a)} \subset \Omega : \quad u(a) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(a)} u(x)\, dS_x$$

gilt. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und für alle $x \in \Omega$ gilt $\Delta u(x) = 0$.

Bew.: Sei $B_R(a)$ eine Kugel mit $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$ und, für $y \in \overline{B_R(a)}$:

$$v(y) := \begin{cases} u(y) & y \in \partial B_R(a) \\ \dfrac{1}{\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} u(x) \frac{R^2 - |y-a|^2}{|x-y|^n}\, dS_x & y \in B_R(a) \end{cases}$$

Dann ist $v$ nach Satz 2 harmonisch in $B_R(a)$, insbesondere gilt $v \in C^\infty(B_R(a))$ und es gilt auch für $v$ die MWE. Wir setzen $w = u - v$. Dann genügt $w \in C(\overline{B_R(a)})$ der MWE und es gilt $w\big|_{\partial B_R(a)} = 0$. Mit dem schwachen Maxi-

mumprinzip folgt $w=0$, also $u=v$ in $B_R(a)$.
D.h. $u$ ist in $B_R(a)$ harmonisch. Dies gilt für jede Kugel, deren Abschluss in $\Omega$ liegt, und damit ist $u$ in $\Omega$ harmonisch. $\square$

In ähnlicher Weise können wir das Poisson-Integral verwenden, um zu zeigen:

Satz 4: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist $u$ reell analytisch, genauer: Sind $a \in \Omega$ und $R > 0$, so dass $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$, dann kann $u$ um den Punkt $a$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, die auf $\overline{B_{\frac{R}{3}}(a)}$ gleichmäßig konvergiert.

Bew.: Wir haben $u(y) = \dfrac{R^2 - |y-a|^2}{R\,\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B_R(a)} \frac{u(x)}{|x-y|^n}\, dS_x$

$$= \frac{R^2-|y-a|^2}{R^{n+1}\omega_n} \cdot \int_{\partial B_R(a)} u(x) \frac{dS_x}{\left|\frac{x}{R}-\frac{y}{R}\right|^n} \,.$$

Dabei ist $\left|\frac{x}{R}-\frac{y}{R}\right|^{-n} = \left\langle \frac{x-a}{R} - \frac{y-a}{R}, \frac{x-a}{R} - \frac{y-a}{R} \right\rangle^{-n/2}$

$$= \left(1 - 2\,\frac{\langle x-a, y-a\rangle}{R^2} + \frac{|y-a|^2}{R^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = (1+\varrho)^{-\frac{n}{2}}$$

mit $\varrho = -2\,\dfrac{\langle x-a, y-a\rangle}{R^2} + \dfrac{|y-a|^2}{R^2}$.

Nun konvergiert die Binomialreihe

$$(1+\xi)^\lambda = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\lambda}{\ell} \xi^\ell$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\lambda}{\ell} = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{\lambda-k+1}{k}$$

für alle $|\xi|<1$. (Der Konvergenzradius ist 1, unabhängig von $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$). Nun ist auf- grund unserer Voraussetzung $|y-a| \leq \frac{R}{3}$:

$$|\xi| \leq \frac{|y-a|^2}{R^2} + 2 \underbrace{\frac{|x-a|}{R}}_{=1} \underbrace{\frac{|y-a|}{R}}_{\leq \frac{1}{3}} \leq \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9} < 1 .$$

Also konvergiert die Reihe

$$\left|\frac{x}{R} - \frac{y}{R}\right|^{-4} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{-\frac{4}{2}}{\ell} \left( \frac{|y-a|^2}{R^2} - 2\frac{\langle x-a, y-a\rangle}{R^2} \right)^\ell$$

gleichmäßig in $x \in \partial B_R(a)$ und $y \in \overline{B_{\frac{R}{3}}(a)}$. Ausmultiplizieren und gliedweise Integration ergibt eine Potenzreihendarstellung von $u$. □

Aus der Charakterisierung harmonischer Funktionen durch die MWE ergibt sich leicht ein erster Konvergenzsatz. Dazu sei an den Begriff der kompakten Konvergenz erinnert, den wir in der Funktionentheorie kennengelernt haben:

Def.: Eine Funktionenfolge heißt kompakt konvergent, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches gleichmäßig konvergiert.

Bem. Kompakte Konvergenz auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz.

Satz 5: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die kompakt gegen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion $u$ harmonisch.

Bew.: Für jede Kugel $B_R(a)$ mit $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$ gilt

$$u(a) = \lim_{k\to\infty} u_k(a) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \lim_{k\to\infty} \int_{\partial B_R(a)} u_k(x)\,dS_x .$$

Da $\partial B_R(a)$ kompakt und die Konvergenz also auf $\partial B_R(a)$ gleichmäßig ist, können Integral und Grenzwert vertauscht werden, so dass

$$u(a) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(a)} \lim_{k\to\infty} u_k(x)\,dS_x = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(a)} u(x)\,dS_x .$$

D.h. die Grenzfunktion $u$ hat die MWE und ist nach Satz 3 harmonisch. $\square$

Als eine weitere Folgerung aus dem Poisson-Integral erhalten wir: 

Satz 6 (Harnacksche Ungleichung): $u \in C^2(B_R(0))$ sei nichtnegativ und harmonisch. Dann gilt für $y \in B_R(0)$:

$$u(0) \cdot R^{n-2} \frac{R-|y|}{(R+|y|)^{n-1}} \leq u(y) \leq u(0) R^{n-2} \frac{R+|y|}{(R-|y|)^{n-1}} .$$

Bew.: O.E. können wir $u \in C(\overline{B_R(0)})$ annehmen. (Sonst gilt die Ungleichung für $R-\varepsilon$ anstelle von $R$, und dann lässt man $\varepsilon \to 0$ laufen.) Dann ist

$$u(y) = \frac{1}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(0)} u(x) \frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^n} \, dS_x .$$

Nun gilt für $x \in \partial B_R(0)$

$$R-|y| = |x|-|y| \leq |x-y| \leq |x|+|y| = R+|y|$$

und daher

$$\frac{1}{(R-|y|)^n} \geq \frac{1}{|x-y|^n} \geq \frac{1}{(R+|y|)^n} .$$

Zusammen mit der MWE folgt hieraus

$$u(y) \leq \frac{1}{R\omega_n} \frac{R^2-|y|^2}{(R-|y|)^n} \cdot \int_{\partial B_R(0)} u(x) \, dS_x = u(0) \cdot R^{n-2} \frac{R+|y|}{(R-|y|)^{n-1}}$$

und

$$u(y) \geq \frac{1}{R\omega_n} \frac{R^2-|y|^2}{(R+|y|)^n} \cdot \int_{\partial B_R(0)} u(x) \, dS_x = u(0) R^{n-2} \cdot \frac{R-|y|}{(R+|y|)^{n-1}} .$$

$\square$

Als Folgerung erhält man den

Satz von Liouville für harmonische Funktionen:

Es sei $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach oben beschränkt. Dann ist $u$ konstant.

Bew. Sei $u(x) \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $v := M - u$. Dann ist $v$ nichtnegativ und harmonisch, es gilt also die Harnack-Ungleichung

$$v(0) \cdot R^{n-2} \frac{R-|y|}{(R+|y|)^{n-1}} \leq v(y) \leq v(0) R^{n-2} \frac{R+|y|}{(R-|y|)^{n-1}},$$

wobei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $R > |y|$ ist. Fixiert man $y$, so ergibt sich im $\lim_{R \to \infty}$: $\quad v(0) \leq v(y) \leq v(0)$.

Also sind $v$ und damit $u$ konstant. $\square$

Der nächste Schritt ist es, die Harnack-Ungleichung in geeigneter Weise auf beliebige beschränkte Gebiete zu verallgemeinern:

Satz 7: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^2(\Omega)$ nichtnegativ und harmonisch, sowie $\Omega'$ ein beschränktes Gebiet, so dass $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Dann gibt es ein $C = C(\Omega, \Omega')$, so dass

$$\sup_{x \in \Omega'} u(x) \leq C \inf_{x \in \Omega'} u(x).$$

(Bem.: Die Konstante $C$ hierin ist unabhängig von $u$. – Es ist $\sup_{x \in \Omega'} u(x) = \max_{x \in \overline{\Omega'}} u(x)$, entsprechend für das Infimum.)

Bew.: (1) Zunächst sei $\Omega' = B_R(a)$, wobei wir zusätzlich $B_{2R}(a) \subset \Omega$ voraussetzen. O.E. nehmen wir $a=0$ an. Dann ergibt die Harnacksche Ungleichung für $|y|<2R$:

$$u(0)(2R)^{n-2}\,\frac{2R-|y|}{(2R+|y|)^{n-1}} \le u(y) \le u(0)(2R)^{n-2}\,\frac{2R+|y|}{(2R-|y|)^{n-1}}$$

und für $|y| \le R$ folgt

$$u(0)\cdot 2^{n-2}\cdot \frac{1}{3^{n-1}} \le u(y) \le u(0)\cdot 2^{n-2}\cdot 3$$

woraus sich

$$\frac{\sup\{u(y) : |y| \le R\}}{\inf\{u(y) : |y| \le R\}} \le \frac{u(0)\cdot 2^{n-2}\cdot 3}{u(0)\cdot 2^{n-2}\cdot 3^{-(n-1)}} \le 3^n$$

(2) Nun sei $\Omega'$ beschränkt mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Dann ist $\overline{\Omega'}$ kompakt und daher $\operatorname{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) > 0$. Wir wählen $R < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$, so dass $B_{2R}(a) \subset \Omega$ für jedes $a \in \overline{\Omega'}$ und überdecken

$$\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_R(a_k).$$

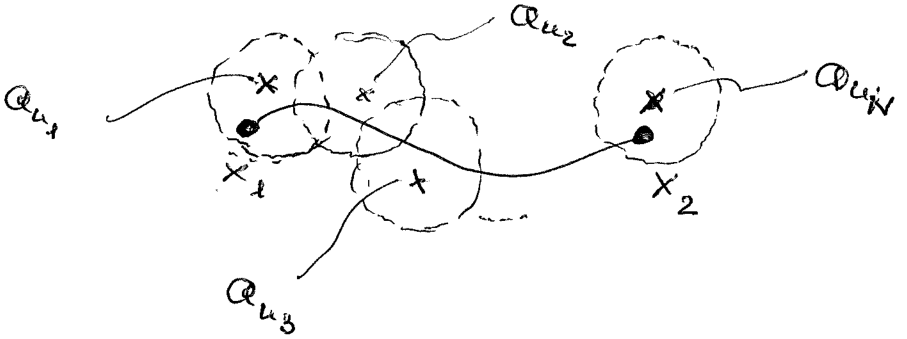
Nun seien $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$ mit $u(x_1) = \min\{u(x) : x \in \overline{\Omega'}\}$ und $u(x_2) = \max\{u(x) : x \in \overline{\Omega'}\}$. $\Omega'$ ist als ein Gebiet vorausgesetzt. Also existiert ein stetiger Weg von $x_1$ nach $x_2$, der maximal $N$ Kugeln durchläuft. Wir erhalten eine Ungleichungskette

$$\max\{u(x) : x\in\overline{\Omega'}\} = u(x_2) \leq \sup\{u(x) : x\in B_R(a_{n_1})\}$$

$$\leq 3^n \cdot \inf\{u(x) : x\in B_R(a_{n_1})\} \leq 3^n \cdot \sup\{u(x) : x\in B_R(a_{n_2})\}$$

$$\leq 3^n \cdot 3^n \inf\{u(x) : x\in B_R(a_{n_2})\} \leq \dots$$

$$\leq 3^n \cdot \ldots \cdot 3^n \cdot \inf\{u(x) : x\in B_R(a_{n_N})\} \leq 3^{Nn} \underbrace{u(x_1)}_{=\min\{u(x) : x\in\overline{\Omega'}\}}$$




$\square$

Mit dieser Version der Harnack-Ungleichung können wir einen deutlich stärkeren Konvergenzsatz für harmonische Funktionen zeigen:

<u>Satz</u> 8 (Harnackscher Konvergenzsatz): Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_k : \Omega\to\mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge harmonischer Funktionen. Es gebe ein $x_0\in\Omega$, so dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x_0) > -\infty$. Dann konvergiert die Folge $(u_k)_k$ kompakt gegen eine harmonische Funktion $u : \Omega\to\mathbb{R}$.

<u>Bem.</u>: Entsprechendes gilt, wenn die Folge $(u_k)$ monoton steigt und in einem Punkt $x_0\in\Omega$ gilt, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x_0) < \infty$.

Bew.: Gegeben sei ein Kompaktum $K \subset \Omega$. Nach Vergrößerung können wir annehmen, dass

(i) $x_0 \in K$ und

(ii) $K = \overline{\Omega'}$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega'$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $C = C(\Omega, \Omega')$ die Konstante aus Satz 7. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon, C) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq l \geq N$

$$0 \leq u_l(x_0) - u_k(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{C}.$$

Satz 7, angewendet auf die harmonische Funktion $u_l - u_k$ ergibt dann

$$0 \leq u_l(x) - u_k(x) \leq \varepsilon \qquad \forall x \in K = \overline{\Omega'}.$$

Das bedeutet

$$\lim_{k,l \to \infty} \sup_{x \in K} |u_l(x) - u_k(x)| = \lim_{k,l\to\infty} \underbrace{\|u_l - u_k\|_K}_{\text{Sup-Norm auf } K} = 0,$$

Die Folge $(u_k)$ ist also eine Cauchy-Folge im Banachraum $(C(K), \| \ \|_K)$ und darum gleichmäßig (auf $K$) konvergent gegen eine stetige Grenzfunktion $u : K \to \mathbb{R}$. Diese ist nach Satz 5 harmonisch. (Da $K \subset \Omega$ beliebig war, "lebt" diese Grenzfunktion auf ganz $\Omega$.) □