2.5 Greensche Funktionen

Wenn in der Greenschen Darstellungsformel

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)G(y,x)\,dS_x + \int_{\Omega} \Delta u(x) G(y,x)\,dx$$

$u \in C^2(\bar\Omega)$ eine Lösung des Dirichlet-Problems $u\big|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$ für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ ist, so vereinfacht sich diese zu

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)G(y,x)\,dS_x .$$

Hierbei sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet gemäß den Voraussetzungen des Gaussschen Satzes und

$$G(y,x) = N_0(x-y) + \varphi(y,x) \quad \text{eine Grundlösung}$$

von Δ auf Ω mit

$$N_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln(|x|)\,; & n=2 \\ \frac{-1}{(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}\,; & n\geq 3 \end{cases}, \quad \Delta_x \varphi(y,x) = 0 \quad \forall x,y \in \Omega$$

Hierbei haben wir noch die Freiheit der Wahl des regulären Anteils φ der Grundlösung G. Mit $\varphi \equiv 0$ können wir z.B. am einfachsten die folgende Regularitätsaussage zeigen:

Lemma 1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann ist bereits $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bew.: Zu $y_0 \in \Omega$ wählen wir $B := B_\varepsilon(y_0)$ mit $\overline{B} \subset \Omega$.

Dann ist für $y \in B' := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$

$$u(y) = \int_{\partial B} u(x) \frac{\partial N_0}{\partial \nu_x}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) N_0(x-y) \, dS_x$$

Integriert wird über das Kompaktum ∂B, von dem alle betrachteten $y \in B'$ einen Abstand $\operatorname{dist}(y, \partial B) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ haben. Der Integrand ist beliebig oft nach y d'bar, so dass Ableitung nach y und Integral nach dS_x vertauscht werden können. □

Nun zur Lösung des Dirichlet-Problems: Wenn es uns gelingt, den regulären Anteil φ der Greenlösung G so zu wählen, dass

$$G(y,x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega,$$

so reduziert sich die Darstellungsformel weiter auf

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(y,x) \, dS_x \, .$$

Die rechte Seite ist unabhängig von u, wir erhalten eine Integraldarstellung der Lösung, aus der wir im Prinzip die Lösung aus den Randwerten berechnen können. Das führt auf die folgende Definition:

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und G_Ω eine Grundlösung von Δ für Ω, so dass

$$G_\Omega(y,x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$$

Dann heißt G_Ω die Greensche Funktion des Gebiets Ω.

Bem.: (1) Die Beschränktheit von Ω wird in der Definition nicht vorausgesetzt.

(2) Ist Ω beschränkt, so ist G_Ω eindeutig bestimmt.

Bew. Seien G_Ω und G'_Ω Greensche Funktionen von Ω, $y \in \Omega$ fest und $u(x) = G_\Omega(y,x) - G'_\Omega(y,x)$. Dann ist $\Delta u(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung folgt $u \equiv 0$.

(3) Die Eindeutigkeitsaussage gilt auch für unbeschränkte Gebiete Ω, wenn man zusätzlich fordert, dass $\lim_{|x|\to\infty} G_\Omega(y,x) = 0$ $\forall y \in \Omega$.

(4) Die Regularitätsvoraussetzung $\varphi(y,\cdot) \in C^2(\bar\Omega)$ wird üblicherweise abgeschwächt zu

$$\varphi(y,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega) \quad \forall y \in \Omega.$$

(5) Das Konzept der Greenschen Funktion ist auch für andere pDG sinnvoll, ggf. mit Gleichungs- und Randbedingungs-spezifischen Modifikationen. Will man den Unterschied kenntlich machen, so spricht man z. B. von der "Greenschen Funktion für den Laplace-Operator" oder von der "harmonischen Greens-Funktion".

(6) Eine Funktion mit ähnlichen Eigenschaften kann man definieren, um eine Integraldarstellung von Lösungen des Neumann-Problems

$$\Delta u = 0 \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = h$$

zu gewinnen (→ Übungen). Eine solche Funktion wird als Greensche Funktion 2. Art oder auch Neumannsche Funktion bezeichnet. Dementsprechend nennt man eine Greensche Funktion gemäß unserer Definition oben auch eine "Greensche Funktion 1. Art".

Zurück zu den Greenschen Funktionen 1. Art, fortan Greensche Funktionen. Zuerst beweisen wir ihre Symmetrieeigenschaft.

Lemma 2: Es sei G_Ω die Greensche Funktion eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$, dass $G_\Omega(a,b) = G_\Omega(b,a)$.

Bew.: Wir setzen $u(x) := G_\Omega(a,x)$ und $v(x) = G_\Omega(b,x)$. $\varepsilon > 0$ sei so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset \Omega$, $\overline{B_\varepsilon(b)} \subset \Omega$ und $\overline{B_\varepsilon(a)} \cap \overline{B_\varepsilon(b)} = \emptyset$. Die 2. Greensche Identität, angewendet auf u, v und $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(a)} \cup \overline{B_\varepsilon(b)})$ ergibt:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} u(x)\Delta v(x) - \Delta u(x) v(x)\, dx \quad \begin{pmatrix} u \text{ und } v \text{ sind} \\ \text{in } \Omega_\varepsilon \text{ harmonisch} \end{pmatrix}$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x)\, dS_x \quad (2.\text{ Greens})$$

$$= \int_{|x-a|=\varepsilon} v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\, dS_x$$

$$+ \int_{|x-b|=\varepsilon} \text{—— " ——}\, dS_x,$$

letzteres weil u und v auf $\partial\Omega$ verschwinden und weil in den letzten beiden Integralen die Normalen ins Äußere der ε-Kugeln gerichtet sind. Andererseits ergibt die Greensche Darstellungsformel, angewendet mit $\tilde\Omega = B_\varepsilon(a)$ bzw. $\tilde\Omega = B_\varepsilon(b)$, dass

$$G_\Omega(a,b) = u(b) = \int_{|x-b|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial G_\Omega}{\partial \nu_x}(b,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) G_\Omega(b,x)\, dS_x$$

$$= \int_{|x-b|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x)\, dS_x$$

und ebenso

$$G_\Omega(b,a) = v(a) = \int_{|x-a|=\varepsilon} v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\, u(x)\, dS_x\,,$$

insgesamt also $\quad 0 = G_\Omega(b,a) - G_\Omega(a,b)$. $\square$

Die Berechnung Greenscher Funktionen für konkret vorgegebene Gebiete Ω kann eine äußerst schwierige Aufgabe sein. Es gibt im wesentlichen zwei Methoden zu ihrer Bestimmung:

(1) Spiegelladungsmethode ("method of images"):

Man interpretiert das Newton-Potential N_y als das von einer Punktladung in $y \in \Omega$ erzeugte elektrostatische Potential. Dann sucht man nach einer Ladungsverteilung außerhalb von $\overline{\Omega}$, deren Potential N_y auf $\partial\Omega$ kompensiert.

(2) Methode der konformen Abbildung:

Hier macht man sich die Invarianzeigenschaften des Laplace-Operators zunutze. Diese Methode ist im wesentlichen auf den zweidimensionalen Fall beschränkt.

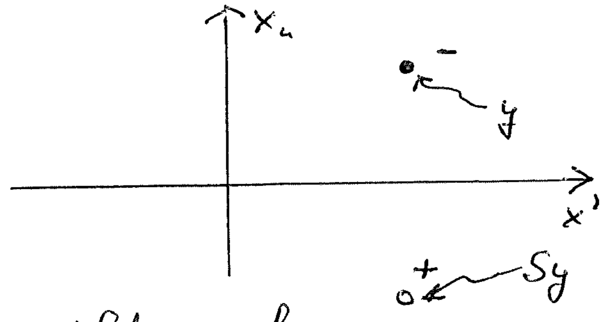
Die Bezeichnung "Methode" erweckt zu Unrecht den Eindruck, es gebe ein systematisches Verfahren zur Berechnung Greenscher Funktionen. Vielmehr beruht es meist auf besonderen Symmetrieeigenschaften der betrachteten Gebiete, wenn diese Methoden zum Ziel führen.

Zu (1). Beginnen wir mit dem einfachsten Beispiel, der Greenschen Funktion des Halbraumes

$$H = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}.$$

Das Newton-Potential N_y wird von einer Punktladung (Elektron o.ä.) in $y \in H$ erzeugt. Spiegelt man $y = (y', y_n)$ an der Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, so erhält man $Sy := (y', -y_n)$, und das zugehörige Newton-Potential

$$N_{Sy}(x) = N_0(x - Sy)$$



ist in H harmonisch. Ferner gilt auf

$$\partial H = \{(x', 0) \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

dass $Sx = x$, letztlich $|x - Sy| = |Sx - y| = |x - y|$ und daher

$$\left(N_y(x) - N_{Sy}(x)\right)\Big|_{\partial H} = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$G_H(y,x) = N_y(x) - N_{Sy}(x) \qquad x, y \in \overline{H},\ x \neq y.$$

Ebenso geht das für andere Halbräume

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle > b\} \qquad (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} \text{ fest}),$$

wobei S durch eine Spiegelung an $\partial H_{a,b}$ zu ersetzen ist. Diese einfache Idee lässt sich etwas ausbauen zu folgendem

Lemma 7: Es sei $H = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = (y', y_n) \mapsto Sy := (y', -y_n)$ die Spiegelung an ∂H. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet mit $S\Omega = \Omega$, G_Ω die Greensche Funktion von Ω und $\Omega^+ = \Omega \cap H$. Dann ist die Greensche Funktion von Ω^+ gegeben durch

$$G_{\Omega^+}(y, x) = G_\Omega(y, x) - G_\Omega(Sy, x).$$

Bew.: Für $x, y \in \overline{\Omega^+}$ mit $x \neq y$ gilt

$$G_\Omega(y,x) - G_\Omega(Sy,x) = N_0(x-y) + \underbrace{\varphi(y,x) - N_0(x-Sy) - \varphi(Sy,x)}_{\text{harmonisch in } \Omega^+}$$

Ferner verschwindet der gesamte Ausdruck für $x \in \partial\Omega$ (und im $\lim_{|x| \to \infty}$, falls Ω unbeschränkt ist). Es bleibt zu zeigen:

Für $x = (x', 0) \in \Omega$ ist $G_\Omega(y,x) - G_\Omega(Sy,x) = 0$ (!)

Dazu setzen wir

$$\Psi(y,x) := G_\Omega(y,x) - G_\Omega(Sy,Sx) \quad (y\in\Omega \text{ fest}, x\in\overline{\Omega}).$$

Dann ist $\Delta_x \Psi(y,x) = 0 \ \forall x\in\Omega$ (die charakteristische Singularität hebt sich gerade auf) und es gilt

$$\Psi(y,x)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{|x|\to\infty} \Psi(y,x) = 0, \text{ falls } \Omega \text{ unbeschränkt ist.}$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes: $\Psi(y,x)=0 \ \forall x\in\overline{\Omega}$.

Ist jetzt $x = (x',0)$ folgt $x = Sx$ und damit

$G_\Omega(y,x) - G_\Omega(Sy,x) = 0$, wie gewünscht. $\square$

Anwendungen: Viertel-, Achtel- usw.-Räume und -Kegeln. Ggf. in den Übungen.

In ähnlicher Weise erhält man die Greensche Funktion von Kreis und Kugel durch Spiegelung an der Einheitssphäre:

Satz 1: Für $n\geq 2$ sei $\Omega = B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$. Dann ist die Greensche Funktion von Ω gegeben durch

$$G_\Omega(y,x) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\left|\frac{x-y}{1-\bar{y}x}\right|\right), \quad \text{falls } n=2, \text{ bzw.}$$

$$G_\Omega(y,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n} - \left(1-2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}\right),$$

falls $n\geq 3$.

Bew. für $n \geq 3$:

Zunächst betrachten wir den Fall $y = 0$. Dafür ist

$$G_\Omega(0,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n}\left(|x|^{2-n} - 1\right) = N_0(x) + \varphi(0,x)$$ mit der

konstanten und also harmonischen Funktion

$\varphi(0,x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}$. Offenbar gilt $G_\Omega(0,x)\big|_{|x|=1} = 0$.

Für $y \in \Omega \setminus \{0\}$ setzen wir $y' = \frac{y}{|y|^2} \in \overline{B_1(0)}^c$ und schreiben

$$1 - 2\langle x, y\rangle + |x|^2|y|^2 = |y|^2\Big(\underbrace{\frac{1}{|y|^2}}_{=|y'|^2} - 2\langle x, \frac{y}{|y|^2}\rangle + |x|^2\Big)$$

$$= |y|^2|y'-x|^2, \text{ also}$$

$$\left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{2-n}{2}} = |y|^{2-n}|y'-x|^{2-n},$$ was wegen

$|y'| > 1$ in Ω tatsächlich harmonisch ist. Nun ist

allgemein

$$|x'-y'|^2 = \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}\right|^2 = \frac{1}{|x|^4|y|^4}\langle x|y|^2 - y|x|^2, x|y|^2 - y|x|^2\rangle$$

$$= \frac{1}{|x|^4|y|^4}\left(|x|^2|y|^4 - 2\langle x,y\rangle|x|^2|y|^2 + |x|^4|y|^2\right)$$

$$= \frac{1}{|x|^2|y|^2}\left(|y|^2 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2\right) = \frac{|x-y|^2}{|x|^2|y|^2}.$$

Speziell für $|x| = 1$:

$$|y|^2|y'-x|^2 = |y|^2|y'-x'|^2 = |x-y|^2,$$

so dass für G_Ω (wie angegeben) tatsächlich gilt

$$G_\Omega(y,x)\big|_{|x|=1} = 0.$$ $\square$

Zu (2), Methode der konformen Abbildungen.

Hier möchte ich zwei Lemmata formulieren und anschließend ein Bsp. diskutieren, das auch eine Beziehung zwischen beiden Methoden herstellt.

<u>Lemma</u> 4: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \longmapsto Tx := Ax + b$$

konform mit $A^T A = \varrho^2 E_n$, so dass $T(\Omega) = \Omega'$. Dann ist die Greensche Funktion von Ω gegeben durch

$$G_\Omega(y, x) = \varrho^{n-2}\, G_{\Omega'}(Ty, Tx) .$$

<u>Bem.</u>: Bei der Bestimmung der Greenschen Funktion eines Gebietes spielt also die Lage, Größe und Orientierung keine wesentliche Rolle. Dem entsprechend reden wir auch von der Greenschen Funktion <u>der</u> Kugel, <u>des</u> Quaders usw..

<u>Bew.</u>: Es ist

$$\varrho^{n-2} G_{\Omega'}(Ty, Tx) = \varrho^{n-2} \cdot N_0(Tx - Ty) + \varrho^{n-2} \varphi(Ty, Tx),$$

wobei φ der reguläre Anteil von $G_{\Omega'}$ ist. Nun gilt $|Tx - Ty|^2 = \langle A(x-y), A(x-y) \rangle = \varrho^2 |x-y|^2$ und daher

$$\varrho^{n-2} N_0(Tx - Ty) = N_0(x-y) \quad \left(+ \frac{\ln(\varrho)}{2\pi}, \text{ falls } n = 2 \right)$$

Aus dem Abschnitt über Invarianzeigenschaften des Laplace-Operators wissen wir, dass

$$x \mapsto \delta^{n-2} \varphi(Ty, Tx)$$

harmonisch ist. Ferner wird $\partial\Omega$ von T bijektiv auf $\partial\Omega'$ abgebildet, so dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$\delta^{n-2} \cdot G_{\Omega'}(Ty, Tx) = 0 .$$

Ferner ist $x \mapsto \delta^{n-2} G_{\Omega'}(Ty, Tx)$ stetig auf $\bar{\Omega} \setminus \{y\}$. Falls Ω unbeschränkt ist, gilt dies auch für Ω' und wir haben $\lim_{x\to\infty} Tx = \infty$ und damit

$$\lim_{x\to\infty} \delta^{n-2} G_{\Omega'}(Ty, Tx) = 0 . \qquad \square$$

Folgerung: Die Greensche Funktion einer beliebigen Kugel $B = B_r(a)$ ist gegeben durch

$$G_B(y,x) = r^{2-n} G_{B_1(0)}\left(\frac{y-a}{r}, \frac{x-a}{r}\right)$$

$$= \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \left\{ |x-y|^{2-n} - \left(r^2 - 2\langle x-a, y-a\rangle + \frac{1}{r^2}|x-a|^2 |y-a|^2\right)^{\frac{2-n}{2}} \right\}$$

für $n \geq 3$ und im Fall $n=2$ durch

$$G_B(y,x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\left|\frac{r(x-y)}{r^2 - (x-a)(\overline{y-a})}\right|\right).$$

Bew.: $T: B_r(a) \to B_1(0)$, $x \mapsto \frac{x-a}{r}$ ist konform und bijektiv. Lemma 4 mit $\delta = \frac{1}{r}$ gibt die erste Gleichung. Die zweite: Einsetzen und elementare Rechnung. $\square$

Lemma 5: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ Gebiete und $\psi: \Omega \to \Omega'$ bijektiv und holomorph mit $\frac{\partial \psi}{\partial z}(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$. ψ sei stetig auf $\bar{\Omega}$ und es gelte $\psi(\partial\Omega) \subset \partial\Omega'$. $G_{\Omega'}$ sei eine Greensche Funktion von Ω'. Dann ist durch

$$G_\Omega(y,x) := G_{\Omega'}(\psi(y), \psi(x))$$

eine Greensche Funktion von Ω gegeben.

Bem.: (1) Gilt auch, wenn ψ antiholomorph, bijektiv und $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$ ist.

(2) "eine Greensche Funktion" kann durch "die Greensche Funktion" ersetzt werden, wenn

- Ω beschränkt ist, oder wenn
- $\lim\limits_{|x| \to \infty} G_{\Omega'}(\psi(y), \psi(x)) = 0 \quad \forall y \in \Omega$ gilt.

Bew.: Es gilt $G_{\Omega'}(\psi(y), \psi(x)) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\psi(y) - \psi(x)|) + \varphi(\psi(y), \psi(x))$, wobei der zweite Summand als Funktion von x harmonisch ist (Abschnitt über Invarianz).

Wir definieren

$$H(y,x) := \begin{cases} \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}, & \text{falls } y \neq x \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(y), & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Dann ist $H(y,x) \neq 0 \ \forall x, y \in \Omega$, denn ψ ist injektiv und es ist $\frac{\partial \psi}{\partial z}(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$ vorausgesetzt.

Die Funktion $H(y,\cdot): \Omega \to \mathbb{C}$, $x \mapsto H(y,x)$ ist in $\Omega \setminus \{y\}$ komplex differenzierbar (bzw. holomorph). Um die komplexe D'barkeit in $x=y$ einzusehen, entwickeln wir Ψ um $y \in \Omega$ in eine Potenzreihe:

$$\Psi(x) - \Psi(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(y)(x-y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(y) \cdot (x-y)^2 + \dots$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\Psi(x)-\Psi(y)}{x-y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(y)(x-y) + \text{h.o.t.}$$

$(= H(y,x) - H(y,y)\ !)$ und daher

$$\frac{\partial}{\partial z} H(y,\cdot)(y) = \lim_{x \to y} \frac{H(y,x)-H(y,y)}{x-y} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(y).$$

Damit ist

$$\frac{1}{2\pi} \ln(|\Psi(y) - \Psi(x)|) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x-y|) + \frac{1}{2\pi} \ln(|H(y,x)|),$$

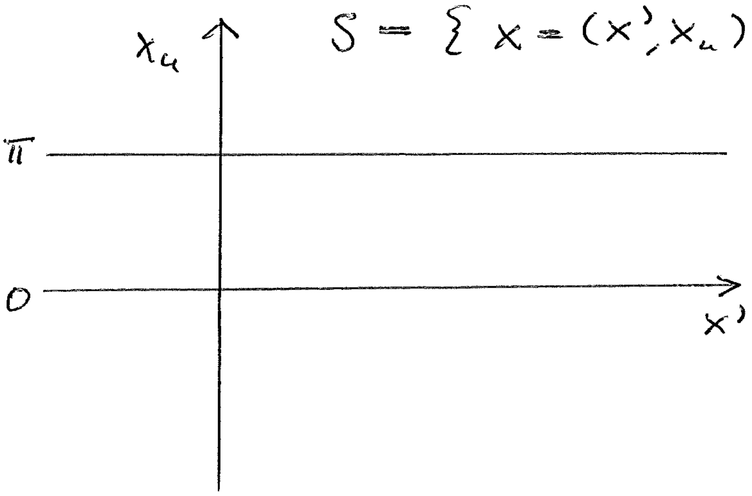
und der zweite Summand ist harmonisch als der Realteil der holomorphen Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi} \ln(H(y,x))$$

(ggf. muss man verschiedene Zweige des log betrachten!)

Ferner gilt für $y \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$ nach Vor. $\Psi(x) \in \partial\Omega'$ und damit $G_{\Omega'}(\Psi(y), \Psi(x)) = 0$. Ferner ist Ψ und damit auch $x \mapsto G_{\Omega'}(\Psi(y), \Psi(x))$ stetig bis zum Rand. $\square$

Bsp.: Greensche Funktion des horizontalen Streifens



$$S = \{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < \pi \}$$

Die Breite π ist zur Vereinfachung der Rechnung gewählt, Verallgemeinerung mit Lemma 4 ($Tx = \lambda x$) möglich.

Wir beginnen mit dem Fall $n=2$ und verwenden die Exponentialfunktion als konforme Abbildung: $\exp : S \longrightarrow H = \{ w = w_1 + i w_2 \in \mathbb{C} : w_2 > 0 \}$

exp bildet S bijektiv auf H ab, denn

$$\exp(z) = \exp(z_1 + i z_2) = \exp(z_1)\exp(i z_2)$$
$$= \rho \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } \rho = \exp(z_1) > 0 \text{ und } \varphi = z_2 \in (0,\pi).$$

Dabei wird der untere Rand von S auf die positive reelle Achse abgebildet, der obere Rand von S auf die negative reelle Achse, der Nullpunkt bleibt unerreicht. (Wir haben also $\exp(\partial S) \subset \partial H$.)

Lemma 5 ist anwendbar und ergibt

$$G_S(y,x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\left| \frac{e^x - e^y}{e^x - e^{\bar{y}}} \right| \right).$$

Damit ist die Greensche Funktion von S (für $n=2$) bestimmt, es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in S}} G_S(y,x) = 0$.

Eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (78)
ist in dieser Form allerdings nicht möglich!

Um unsere Formel für G_s zu interpretieren (und dann hoffentlich verallgemeinern zu können), bemerken wir ein Ergebnis aus der Funktionentheorie, nämlich die Produktentwicklung des Sinus:

$$z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\pi k}\right)^2\right) = \sin(z) \quad \left(= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right)$$

(Übung 47 aus der FT im SoSe 21; Fischer-Lieb, Kap. 8, Satz 3.3)

$$\Rightarrow \quad 2iz \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{2iz}{2\pi k}\right)^2\right) = \left(e^{2iz} - 1\right) \cdot e^{-\frac{2iz}{2}}$$

$$\underset{2iz = w}{\Rightarrow} \quad w \cdot e^{\frac{w}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{w}{2\pi k}\right)^2\right) = e^w - 1$$

Und damit schreiben wir

$$\left|\frac{e^x - e^y}{e^x - e^{\bar{y}}}\right| = \underbrace{\left|\frac{e^y}{e^{\bar{y}}}\right|}_{=1} \left|\frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-\bar{y}} - 1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x-y)\, e^{\frac{x-y}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{x-y}{2\pi k}\right)^2\right)}{(x-\bar{y})\, e^{\frac{x-\bar{y}}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{x-\bar{y}}{2\pi k}\right)^2\right)}\right| ,$$

wobei $\left|\frac{e^{\frac{x-y}{2}}}{e^{\frac{x-\bar{y}}{2}}}\right| = \left|e^{\frac{\bar{y}-y}{2}}\right| = 1$. Logarithmieren ergibt

$$\ln\left(\left|\frac{e^x-e^y}{e^x-e^{\bar y}}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{x-y}{x-\bar y}\right|\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(x-y)^2+(2\pi k)^2}{(x-\bar y)^2+(2\pi k)^2}\right) \qquad a^2+b^2=(a+ib)\cdot(a-ib)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x-y}{x-\bar y}\right|\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(x-(y+2\pi ik))(x-(y-2\pi ik))}{(x-(\bar y+2\pi ik))(x-(\bar y-2\pi ik))}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \ln\left(\left|\frac{x-(y+2\pi ik)}{x-(\bar y+2\pi ik)}\right|\right)$$

(Beitrag von $k=0$: $\ln\left(\left|\frac{x-y}{x-\bar y}\right|\right) = 2\pi\cdot G_H(y,x)$)

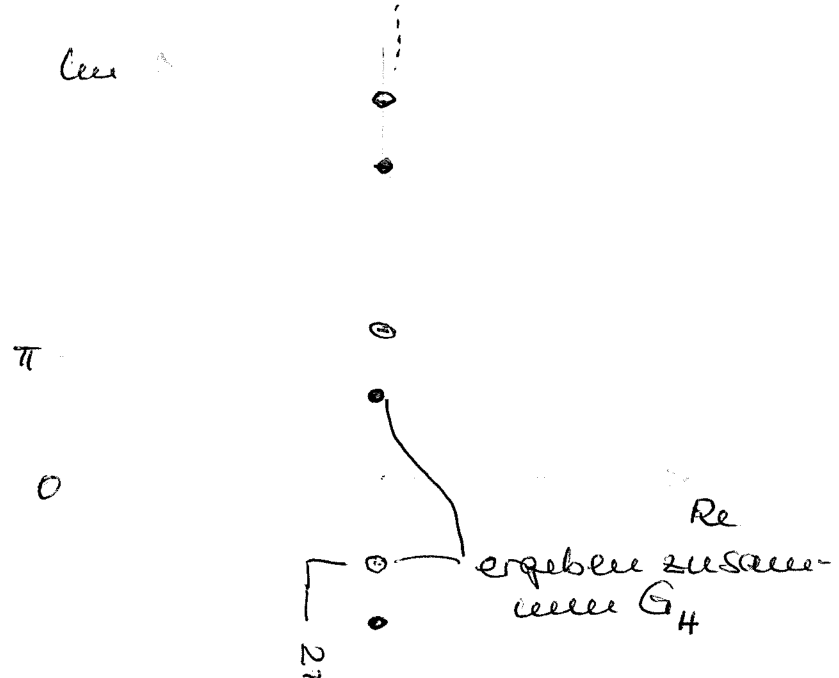
Ergebnis: $$G_S(y,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\ln(|x-(y+2\pi ik)|) - \frac{1}{2\pi}\ln(|x-(\bar y+2\pi ik)|)$$

Abgesehen vom Newton-Potential $\frac{1}{2\pi}\ln(|x-y|)$ erkennen wir die Beiträge zweier Folgen von Spiegelladungen an den Orten

$y_k := y+2\pi ik,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ mit demselben Vorzeichen und

$\tilde y_k := \bar y+2\pi ik,\ k\in\mathbb{Z}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen,

die wir uns durch eine Folge wiederholter Spiegelungen aus der ursprünglichen hervorgegangen denken können:



Diese Interpretation erlaubt uns die Verallgemeinerung auf höhere Raumdimensionen!

Begründete Vermutung: Für $n \geq 3$ gilt

$$G_S(y,x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x-(y+2\pi k e_n)|^{2-n} - |x-(\tilde{y}+2\pi k e_n)|^{2-n},$$

wobei für $y=(y',y_n)$ $\tilde{y} := (y',-y_n)$ sei.

Der Nachweis, dass

$$0 = G_S(y,x)\Big|_{x \in \partial S} = \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} |x-(y\ldots)|^{2-n} - |x-(\tilde{y}\ldots)|^{2-n}$$

gilt, ist harmlos, aber es fehlt uns ein Konvergenzsatz, etwa der Form:

"Der lokal gleichmäßige Grenzwert harmonischer Funktionen ist ebenfalls harmonisch."

(wie der Weierstraßsche Konvergenzsatz in der Funktionentheorie)