2.3 Fundamentallösungen

Hier betrachten wir etwas allgemeiner lineare Differentialoperatoren

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha$$

der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten c_α. Fundamentallösungen für solche Operatoren sind in erster Linie Hilfsmittel zur Lösung der inhomogenen Gleichung $Lu = f$. Sie sind aber auch oft nützlich zur Lösung von Randwertproblemen für die homogene Gleichung $Lu = 0$.

In dieser einführenden Vorlesung möchte ich zwei Formulierungen des Begriffs der Fundamentallösung geben: Die erste im Rahmen der klassischen Analysis und anschließend eine etwas allgemeinere im Sinne der Theorie der Distributionen (= verallgemeinerte Funktionen).

2.3.1 "Klassische" Definition

Zunächst einige Bezeichnungen und Begriffe:

(1) Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (oder $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{C}$) offen

heißt $\quad \operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \,(\text{bzw. } x \in \Omega): f(x) \neq 0\}}$

der Träger von f (engl.: support).

(2) $C_0^k(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^k(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f$ ist kompakt$\}$,

(3) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_0^k(\mathbb{R}^n)$,

(4) $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \cdot \chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für jedes kompakten $K \}$;

der Vektorraum der lokal integrierbaren Funktionen.

(5) Der Differentialoperator $L^* = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha (-\nabla)^\alpha$ heißt der zu $L = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \nabla^\alpha$ adjungierte Operator.

Bem. u. Bsp. zu (5): (i) Stimmt nicht überein mit dem adjungierten Operator aus der Hilbertraumtheorie. Hier verzichten wir auf die komplexe Konjugation der Koeffizienten und auch auf die genaue Festlegung des Definitionsbereiches von L und L^*.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ mit $Lf \in L^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$. Dann ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_\Omega Lf(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, L^*\varphi(x)\, dx.$$

(Die Randterme verschwinden aufgrund der Voraussetzung $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$.)

(iii) Für den Laplace-Operator gilt $\Delta^* = \Delta$.

Def.: Eine lokal integrierbare Funktion $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt eine Fundamentallösung des Differentialoperators L, wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x)\, L^* \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Bem.: Eine Fundamentallösung ist nicht eindeutig bestimmt. Addiert man eine glatte Lösung von $Lu = 0$ hinzu, so erhält man einen weitere.

Kennt man eine Fundamentallösung E eines Differentialoperators L, so kann man für rechte Seiten $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ Lösungen der inhomogenen Gleichung $Lu = f$ bestimmen. Um dies zu erläutern, sei an den Begriff der Faltung erinnert:

Def.: Es seien $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ λ^n-messbare Funktionen, so dass für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy < \infty$$

ist. Dann heißt für solche x

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

die Faltung von f und g in x.

Bem.: Hinreichende Bedingungen an f und g für die Existenz der Faltung:

(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. In diesem Fall ergibt die Höldersche Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \le \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}}_{=\|f\|_p} \cdot \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}}_{=\|g\|_{p'}} < \infty$$

In diesem Fall ist also $f*g$ überall definiert.

(2) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall ergibt der Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx \; |g(y)|\,dy$$

$$= \|f\|_1 \, \|g\|_1 < \infty .$$

Hieraus folgt $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, insbesondere existiert $f*g(x)$ für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für $K = \operatorname{supp} g$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_K |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \|g\|_\infty \int_K |f(x-y)|\,dy < \infty$$

so dass auch in diesem Fall $f*g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert.

Und noch eine Bem.: Die Faltung ist kommutativ und assoziativ. Sie verhält sich distributiv mit der punktweisen Addition. Fassen wir sie auf als Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n), \qquad \text{(vgl. (2))}$$

so gilt: $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring ohne Einselement.

Lemma 1: Es seien $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ und L ein Differentialoperator k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$L(f*g)(x) = f * Lg(x).$$

Bew.: (1) Stetigkeit: Für $x, x' \in \mathbb{R}^n$ haben wir

$$f*g(x) - f*g(x') \underset{*\ \text{komm.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,(g(x-y) - g(x'-y))\,dy\,.$$

Da g stetig ist, konvergiert der Integrand für $x' \to x$ punktweise gegen Null. Ist $\operatorname{supp} g \subset B_R(0)$ und $|x-x'| < R$, so ist durch

$$|f(y)|\; 2\|g\|_\infty\, \chi_{B_{2R}(0)}(x-y)$$

eine integrierbare Majorante gefunden. Mit dem

Lebesgueschen Konvergenzsatz folgt $\lim_{x' \to x} f * g(x') = f * g(x)$.

(2) Differenzierbarkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f * g(x) = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{h}(g(x + he_j - y) - g(x-y))\, dy$$

$$\underset{\text{MWS}}{=} \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + \vartheta h e_j - y)\, dy$$

$$\underset{\text{Lebesgue,}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)\, dy.$$

$\frac{\partial g}{\partial x_j}$ ist stetig und hat kompakten Träger.

Dass $\frac{\partial}{\partial x_j} f * g$ stetig ist, folgt aus (1). Genauso für höhere Ableitungen. □

Satz 1: Es sei L ein linear Differentialoperator der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten, E eine Fundamentallösung von L und $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Dann ist durch $u := E * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $Lu = f$ gegeben.

Bew.: Nach Lemma 1 ist $E * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und

$$Lu(x) = L(E * f)(x) = E * Lf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\, Lf(x-y)\, dy.$$

Wir setzen $\psi(y) = f(x-y)$. Dann ist

$$L^* \psi(y) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha (-\nabla)^\alpha \psi(y) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha (-\nabla)^\alpha f(x-y)(-1)^\alpha$$

...

$$\ldots = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \nabla^\alpha f(x-y) = Lf(x-y).$$

$$\Longrightarrow Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) L^* \Psi(y)\, dy = \Psi(0) = f(x). \qquad \square$$

2.3.2* "Distributionelle" Formulierung

Für die Laplace-Gleichung und ihre Verwandtschaft (Helmholtz-, polyharmonische Gleichungen u.ä.) können Fundamentallösungen in Form lokal integrierbarer Funktionen gefunden werden (siehe Abschnitt 2.3.3), ebenso für die Wärmeleitungsgleichung. (Hierfür ist die Formulierung in 2.3.1 daher ausreichend.) Für die Wellen- und die Schrödingergleichung in höheren Dimensionen ist dies hingegen nicht mehr möglich, was Anlass zu einer Verallgemeinerung des Konzepts der Fundamentallösung im Rahmen der Distributionstheorie gibt. (Ich werde mich hier aber auf die Einführung der Grundbegriffe beschränken.)

Def.: Eine Folge $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ heißt konvergent gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, in Zeichen $\varphi_k \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$, wenn gilt:

(1) Es gibt ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.

(2) Für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ konvergiert

$\nabla^\alpha \varphi_k$ gleichmäßig gegen $\nabla^\alpha \varphi$.

Mit Hilfe dieses Konvergenzbegriffs lässt sich die Stetigkeit von Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ bequem als Folgenstetigkeit erklären:

Def.: Eine Abbildung $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ heißt stetig, wenn aus $\varphi_k \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$ stets $\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi)$ folgt.

Def. (Distribution, verallgemeinerte Funktion):
Ein stetiges lineares Funktional

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto T[\varphi]$$

heißt eine Distribution. Der Vektorraum aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Bsp.: (1) Reguläre Distributionen. Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ wird durch

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$$

eine Distribution definiert. Die Stetigkeit folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz, wenn man $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K \ \forall k \in \mathbb{N}$ mit einem kompakten $K \subset \mathbb{R}^n$ beachtet. Die integrierbare Majorante ist

$$|f(x)| \cdot \chi_K(x) \cdot \max_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_\infty .$$

(2) Radon-Maße. Ein reguläres Borel-Maß $\mu : \mathcal{B}^n \to [0,\infty]$ heißt ein Radon-Maß, wenn $\mu(K) < \infty$ für alle Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist durch (57)

$$T_\mu[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

eine Distribution $T_\mu : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert. Konkret:

(2.1) Ist S ein glattes Flächenstück, so ist erst

$$\delta_S(A) = \int_S \chi_A(x)\, dS_x \qquad (A \in \mathcal{B}^n)$$

ein Radon-Maß gegeben. Die entsprechende Distribution ist $\delta_S[\varphi] = \int_S \varphi(x)\, dS_x$.

(2.2) Das Dirac-Maß δ_a, $a \in \mathbb{R}^n$, ist definiert als

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{B}^n).$$

Dies ist ein endliches Maß, da $\delta_a(\mathbb{R}^n) = 1$. Die zugehörige Distribution wird genauso bezeichnet:

$$\delta_a[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\delta_a(x) = \varphi(a).$$

Letzteres ist klar für $\varphi = \chi_A$, gilt für Linearkombinationen und monotone Limiten und daher für alle Borel-meßbaren Funktionen, insbes. also für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Def. (Ableitung von Distributionen): Es sei L ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und L^* sein adjungierter. Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$LT[\varphi] := T[L^*\varphi] \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Bsp.: (1) $\frac{\partial T}{\partial x_j}[\varphi] = -T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]$ — " — .

(2) Die Ordnung von L sei $k \in \mathbb{N}$ und T_f eine reguläre Distribution mit einem $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt aufgrund der Regel der part. Int.

$$LT_f[\varphi] \underset{\text{Def.}}{=} T_f[L^*\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, L^*\varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Lf(x) \cdot \varphi(x)\, dx = T_{Lf}[\varphi]$$

Für glatte Funktionen stimmt der distributionelle Ableitungsbegriff also mit dem klassischen überein, wenn man eine C^k-Funktion f mit der von ihr induzierten regulären Distribution identifiziert.

Bem.: Durch die Def. wird erzwungen, dass jede Distribution unendlich oft differenzierbar ist. Dies ist der schwächste und allgemeinste Ableitungsbegriff.

Def. (Produkt mit C^∞-Funktionen): Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert man das Produkt $f \cdot T$ durch

$$f \cdot T[\varphi] = T[f\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Bem.: (1) Für dieses Produkt gilt die Produktregel:

$$\frac{\partial(f \cdot T)}{\partial x_j}[\varphi] = f \cdot T\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] = T\left[-f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]$$

$$= T\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(f \cdot \varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \varphi\right]$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x_j}[f \cdot \varphi] + \frac{\partial f}{\partial x_j} T[\varphi] = f \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j}[\varphi] + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot T[\varphi]$$

also: $\dfrac{\partial(f \cdot T)}{\partial x_j} = f \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \cdot T.$

(2) Es gibt keine assoziative und kommutative Multiplikation auf $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Bsp.: $\quad pv\,\frac{1}{x}[\varphi] := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$

$(n=1)$

sog. Cauchyscher Hauptwert von $\frac{1}{x}$.

$\rightsquigarrow \; x \cdot pv\,\frac{1}{x}[\varphi] = pv\,\frac{1}{x}[x\varphi] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$

$\rightsquigarrow \; x \cdot pv\,\frac{1}{x} = 1 \;\rightsquigarrow\; (x \cdot pv\,\frac{1}{x}) \cdot \delta_0 = \delta_0$

Aber: $\quad x \cdot \delta_0[\varphi] = \delta_0[x \cdot \varphi] = 0 \;\rightsquigarrow\; x \cdot \delta_0 = 0$

und daher auch $\quad (x \cdot \delta_0) \cdot pv\,\frac{1}{x} = 0$

Wir kommen zum Begriff der Fundamentallösung im Sinne der Distributionstheorie:

Def.: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Fundamentallösung eines Differentialoperators L, falls $LT = \delta_0$ gilt.

Bem.: Ist $T = T_E$ eine reguläre Distribution, so stimmt diese Def. mit der aus 2.3.1 überein:

$$LT_E = \delta_0 \iff LT_E[\varphi] = \delta_0[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} E(x) L^* \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \text{—— " ——} .$$

(Hierbei wird E mit T_E allerdings identifiziert. Die Formulierung $LT = \delta_0$ erleichtert bei vielen Fällen die Berechnung einer Fundamentallösung!)

Einfachstes Bsp.: Sei $n = 1$ und $L = \frac{d}{dx}$. Dann ist die Heavyside-Funktion $H = \chi_{(0,\infty)}$ eine Fundamentallösung von L.

Bew.: Es ist $T_H[\varphi] = \int_0^\infty \varphi(x) dx$ und daher

$$\frac{d}{dx} T_H[\varphi] = -T_H[\varphi'] = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta_0[\varphi]$$

das bedeutet $LT_H = \frac{dT_H}{dx} = \delta_0$, was man üblicherweise in der Form $H' = \delta_0$ schreibt.