2.2 Invarianzeigenschaften des Laplace-Operators

Hierbei geht es um Transformationen der Form

$$Tu = u \circ \varphi ,$$

die eine harmonische Funktion u in eine harmonische Funktion Tu überführen. Aussichtsreiche Kandidaten für φ sind konforme (= lokal winkelerhaltende) Abbildungen.

Def.: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi \in C^1(\Omega, \Omega')$ heißt konform, wenn $\rho \in C(\Omega, (0,\infty))$ existiert, so dass für die Jacobi-Matrix $D\varphi$ von φ gilt

$n \times n$-Einheitsmatrix

$$D\varphi(x)^t D\varphi(x) = \rho(x)^2 \cdot E_n \qquad \forall x \in \Omega .$$

Bem.: (1) Die definierende Gleichung ist äquivalent zu $D\varphi(x)^{-1} = \frac{1}{\rho(x)^2} D\varphi(x)^t$ und damit zu

$$\rho(x)^2 E_n = \rho(x)^2 \cdot D\varphi(x) D\varphi(x)^{-1} = D\varphi(x) D\varphi(x)^t$$

(2) Konforme Abbildungen sind lokal winkeltreu in dem Sinne, dass Schnittwinkel differenzierbarer Wege unter konformen Abbildungen erhalten bleiben.

(3) Die Verknüpfung konformer Abbildungen ist ebenfalls konform.

(2) und (3) sind leicht mit Hilfe der Kettenregel $D(\varphi\circ\psi)(x) = D\varphi(\psi(x))\cdot D\psi(x)$ zu zeigen. Dies sei zur Übung empfohlen.

Bsp.: (1) Eine affin-lineare Abbildung

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Tx = Ax+b$$

mit einer festen $n\times n$-Matrix A und einem festen Vektor $b\in\mathbb{R}^n$ ist genau dann konform, wenn

$$A^tA = AA^t = \varrho^2 E_n \quad \text{für ein } \varrho>0$$

gilt, denn es ist $DT = A$. Für A kommen also Drehungen, Spiegelungen, homogene Streckungen und deren Kompositionen in Frage.

(2) Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}\supset\Omega\to\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ ist genau dann komplex diff.bar, wenn sie reell diffbar ist und den Cauchy-Riemannschen Dgln.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y)$$

genügt. In diesem Fall hat die Jacobi-Matrix

(Ausnahmsweise bezeichnen wir hier die Komponenten des Arguments mit x und y. Sonst ist $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, ebenso für y.)

von φ die Gestalt $D\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit

$$\alpha = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

so dass $D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ +\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha^2+\beta^2)\, E_2$.

Hier ist also $\varrho(x,y)^2 = \alpha^2+\beta^2 = |\nabla \varphi_1(x,y)|^2 = |\nabla \varphi_2(x,y)|^2$.

Eine komplex diffbare Funktion $\varphi: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist also konform, wenn $|\nabla \varphi_1(x,y)| \neq 0 \;\; \forall (x,y) \in \Omega$.

Komplex differenzierbare Funktionen nennt man auch holomorph. Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ heißt antiholomorph, wenn $\bar{f}$ holomorph ~~sind~~ ist. Da die komplexe Konjugation eine Spiegelung und also konform ist, gilt ebenso

Eine antiholomorphe Funktion $\varphi: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist konform, wenn $|\nabla \varphi_1(x,y)| \neq 0$

In der Vorlesung "Funktionentheorie" habe ich ihnen gezeigt, dass damit im zweidimensionalen auch bereits alle konformen Abbildungen gefunden sind.

(3) In höheren Dimensionen gibt es nur eine nichtlineare konforme Abbildung (wenn man von Verknüpfungen mit den affin-linearen absieht) und das ist die Inversion (oder Spiegelung) an der Einheitssphäre

$$I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{x}{|x|^2} =: x'$$

Geometrische Definition:

- x, x' und O sind kollinear.
- Das Produkt der Längen $|x|\,|x'| = 1$

Bew. der Konformität: Zwei Möglichkeiten.

(i) $D\varphi(x)$, $D\varphi(x)^t D\varphi(x)$ ausrechnen. Durchaus keine schlechte Übung.

(ii) Man überlegt sich: Gilt eine Gleichung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 = \rho(x)\,\rho(y)\,|x-y|^2 \qquad (*)$$

für alle $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\varphi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ konform. (Vgl. FT, Lemma 2 in Abschnitt 4)

Dann checkt man $(*)$ für $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ und stellt fest, dass $(*)$ mit $\rho(x) = \frac{1}{|x|^2}$ erfüllt ist.

(Vgl. Übungen zur Funktionentheorie, Blatt 4, Aufg. 16)

Satz 1: Es sei $\varphi \in C^2(\Omega, \Omega')$ konform, $u \in C^2(\Omega')$ und $v = u \circ \varphi$. Dann gilt

$$\Delta v(x) = \rho(x)^2 \Delta u(\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\varphi(x)) \cdot \Delta \varphi_k(x).$$

Bew.: Zunächst sei daran erinnert, dass die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher ~~die~~ in der Situation

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

die Gestalt

$$\frac{d}{dt} f \circ g\,(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t}(t)$$

annimmt. Dies ergibt

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x)$$

und weiter, zusammen mit der Produktregel

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j^2}(x)$$

Summation über j führt auf

$$\Delta v(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}(\varphi(x)) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\varphi(x)) \cdot \Delta \varphi_k(x). =: \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Die zweite Summe hat bereits die gewünschte Form, für die erste nutzen wir die Konformität von φ aus:

φ konform

$$D\varphi(x) \cdot D\varphi(x)^t = \rho(x)^2 E_n \iff \underbrace{\langle \nabla \varphi_k(x), \nabla \varphi_l(x) \rangle}_{= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(x)} = \rho(x)^2 \delta_{k,l} \quad \forall k,l \in \{1,\dots,n\}$$

damit ist

$$\Sigma_1 = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}(\varphi(x)) \cdot \rho(x)^2 \cdot \delta_{kl} = \rho(x)^2 \cdot \Delta u(\varphi(x)).$$

$\square$

Folgerung 1: Es seien

- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$ mit $A^T A = \rho^2 E_n$,
- $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $\Omega = T^{-1}(\Omega')$,
- $u \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = f \in C(\Omega'), \quad u|_{\partial\Omega'} = g \in C(\partial\Omega') \qquad \text{(DP)}$$

für die Poisson-Gleichung und

- $v = u \circ T$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "v"'] & \Omega' \arrow[d, "u"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dann ist $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von

$$\Delta v = s^2 \cdot f \circ T \text{ (auf } \Omega) \qquad v\big|_{\partial\Omega} = g \circ T$$

Bew.: T ist linear, daher gilt für alle Koeffizientenfunktionen T_k von T, dass $\Delta T_k = 0$. Also folgt die Dgl. $\Delta v = s^2 \cdot f \circ T$ (mit T anstelle von φ) aus Satz 1. Da $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit stetiger Inverser ist, gilt auch $T(\partial\Omega) = \partial\Omega'$, so dass die angegebene Randbed. ebenfalls erfüllt ist.

Bem.: (1) Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass das Dirichlet-Problem (DP) für ein beliebiges $f \in C(\Omega')$ und $g \in C(\partial\Omega')$ lösbar ist. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei durch eine konforme affin-lineare Transformation auf Ω' ~~abzu~~ abzubilden. Dann können wir das (DP) auch für jedes $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ lösen.

Daher können wir vom Dirichlet-Problem für "die Kugel", "den Quader", "den Halbraum" usw. sprechen – unabhängig von deren Lage, Größe, Orientierung.

Im Fall $n=2$ kann man für holomorphe und antiholomorphe Funktionen ganz ähnlich verfahren. Für solche sind $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ harmonisch, so dass der zweite Summand in Satz 1 wegfällt. Also gilt

Folgerung 2: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ offen, $\varphi : \Omega \to \Omega'$ holomorph und $u \in C^2(\Omega')$. Dann gilt für $v = u \circ \varphi$

$$\Delta v(z) = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z)\right|^2 \Delta u(\varphi(z)) \qquad \forall z \in \Omega .$$

Ist darüber hinaus $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ mit $\varphi(\partial\Omega) \subset \partial\Omega'$ und $u \in C(\overline{\Omega'})$, so dass

$$\Delta u = f \in C(\Omega'), \qquad u|_{\partial\Omega'} = g \in C(\partial\Omega'),$$

so löst v das Dirichlet-Problem

$$\Delta v = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2 f \circ \varphi \text{ in } \Omega, \qquad v|_{\partial\Omega} = g \circ \varphi .$$

Bem.: (1) Man kann Nullstellen von S im Bew. von Satz 1 zulassen, daher muss man nicht $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ fordern.

(2) Wir hatten oben ausgerechnet

$$S(z)^2 = |\nabla \varphi_1(z)|^2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)^2$$

Andererseits ist $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ (Wirtinger-Ableitung!), also $\longrightarrow$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)$$

$$\underset{C.R.}{=} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \implies \rho(z)^2 = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)\right|^2.$$

(3) Entsprechendes gilt, wenn φ antiholomorph ist. In diesem Fall ist lediglich $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ durch $\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}}$ zu ersetzen.

(4) Eines der Hauptergebnisse der Funktionentheorie (einer Veränderlichen) ist der Riemannsche Abbildungssatz: "Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ lässt sich konform und bijektiv in den offenen Einheitskreis abbilden." Das bedeutet: Wenn die entsprechenden konformen Abbildungen

- stetig bis zum Rand und
- vom Rand zu Rand bijektiv sind,

können wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-gleichung für all diese Gebiete auf dasjenige für den Einheitskreis zurückführen!

Kommen wir zu unserem 3. Bsp., der Inversion

$$I: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \longmapsto \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitssphäre in $n \geq 2$ Dimensionen. Für $n = 2$ ist dies eine antiholomorphe Abbildung, denn für $x \in \mathbb{C}$ ist $\frac{x}{|x|^2} = \frac{1}{\bar{x}}$. Für $n \geq 3$ tritt jedoch ein zusätzliches Problem auf: (Beachte $\frac{\partial}{\partial x_j} |x| = \frac{x_j}{|x|}$)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k}{|x|^2} = \frac{\delta_{jk}}{|x|^2} + x_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-2} = \frac{\delta_{jk}}{|x|^2} - \frac{2 x_j x_k}{|x|^4}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{x_k}{|x|^2} = -2 \frac{\delta_{jk} x_j}{|x|^4} - 2 \frac{\delta_{jk} x_j}{|x|^4} - \frac{2 x_k}{|x|^4} + 8 \frac{x_k x_j^2}{|x|^6}$$

Summation über j ergibt

$$\Delta \frac{x_k}{|x|^2} = \frac{2}{|x|^4} (-2 - \cancel{2}n + 4) \cdot x_k = 2(2-n) \frac{x_k}{|x|^4} \neq 0.$$

Die Komponentenfunktionen sind also für $n \geq 3$ nicht harmonisch, der Zusatzterm in Satz 1 fällt nicht weg! Durch eine kleine Korrektur können wir dennoch eine Transformation erhalten, die harmonische Funktionen in harmonische Funktionen überführt:

Def. Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \notin \Omega$, I die Inversion an der Einheitssphäre und $\Omega' = I(\Omega)$. Für eine Funktion $u : \Omega' \to \mathbb{R}$ heißt dann

$$v : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto v(x) := |x|^{2-n} u(\underbrace{\tfrac{x}{|x|^2}}_{= I(x)})$$

die <u>Kelvin-Transformierte</u> von u.

<u>Lemma</u> 1: Es sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ offen und $u \in C^2(\Omega')$ sowie v die Kelvin-Transformierte von u. Dann gilt

$$\Delta v(x) = \frac{1}{|x|^{n+2}} \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

<u>Bew.</u>: als Übungsaufgabe, alle benötigten Bausteine sind schon bereitgestellt.

Die Kelvin-Transformation einer harmonischen Funktion ist wieder harmonisch. Ähnlich wie in den oben formulierten Folgerungen 1 und 2 kann man sie zur Lösung des Dirichlet-Problems einsetzen, insbesondere wenn

Ω unbeschränkt ist und Ω^c eine Nullumgebung enthält, so dass $\Omega' = I(\Omega)$ beschränkt ist.

Damit können sogenannte Außenraum~~gebiete~~probleme auf Probleme für beschränkte Gebiete zurückgeführt werden.