2. Elementare Potentialtheorie

2.1 Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

Satz 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$ und $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$. Dann gelten:

$$u(a) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x \quad \text{und} \quad u(a) \leq \frac{1}{\tau_n r^n} \int_{B_r(a)} u(x)\, dx.$$

Hierbei ist $\tau_n = \frac{\omega_n}{n}$ das Volumen der n-dim. Einheitskugel.

Bew.: Wir setzen $\varphi(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x+r\xi)\, dS_\xi$

Dann ist nach dem Satz über die Darboux'sche Dgl. (1)

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|a-x|<r} \Delta u(x)\, dx \geq 0,$$

d.h. φ ist monoton steigend. Wegen $\lim_{r \to 0} \varphi(r) = u(a)$ (u ist stetig!)

folgt $u(a) \leq \varphi(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x$, das ist die erste Ungleichung. Integration von 0 bis R ergibt

$$\frac{R^n}{n} \cdot \omega_n u(a) = \int_0^R \omega_n r^{n-1} u(a)\, dr \leq \int_0^R \Big(\int_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x \Big) dr$$

$$= \int_{B_R(a)} u(x)\, dx \quad \text{nach der Coarea-Formel.}$$

$$\Rightarrow \quad u(a) \leq \frac{1}{\tau_n \cdot R^n} \cdot \int_{B_R(a)} u(x)\, dx. \qquad \square$$

Folgerung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ und $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$.

Dann gelten:

(1) Ist $\Delta u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$, so gilt $u(a) \geq \fint_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x$

und $u(a) \geq \fint_{B_r(a)} u(x)\, dx$.

(2) Ist u harmonisch, also $\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$, so hat man

$$u(a) = \fint_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x = \fint_{B_r(a)} u(x)\, dx.$$

Bew.: Für (1) muss man nur den Satz 1 auf $-u$ anwenden. Nimmt man beides zusammen, hat man auch (2).

Lediglich die Stetigkeit wird hier vorausgesetzt!

Def.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, wenn zu jedem $a \in \Omega$ ein $R = R(a) > 0$ existiert, so dass für alle $r \in (0, R)$ gilt

$$u(a) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u(x)\, dS_x.$$

$u \in C(\Omega)$ heißt superharmonisch, wenn $-u$ subharmonisch ist.

Bem.: (1) u harmonisch $\Rightarrow$ u sub- und superharmonisch. Unter der Voraussetzung $u \in C^2(\Omega)$ gilt auch die Umkehrung ($\rightsquigarrow$ Übung). Dass man die Regularitätseigenschaft harmonischer Funktionen aus der MWE folgern kann, werden wir erst später sehen.

(2) Sind u, v subharmonisch und $\lambda, \mu > 0$, so ist auch $\lambda u + \mu v$ subharmonisch.

Satz 2 (starkes Maximumprinzip für subharmonische Funktionen): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch. Für $x_0 \in \Omega$ gelte

$$u(x_0) = \sup\{u(x) : x \in \Omega\}.$$

Dann ist u konstant.

Folgerung: Ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$ superharmonisch und, für ein $x_0 \in \Omega$, $v(x_0) = \inf\{v(x) : x \in \Omega\}$. Dann ist v konstant.

(Ergibt sich aus Satz 2 mit $u = -v$.)

Bew. des Satzes: Wir setzen $M := u(x_0) = \sup\{u(x) : x \in \Omega\}$ und $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Dann ist

- $\Omega_M \neq \emptyset$, da $x_0 \in \Omega_M$, und
- $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ abgeschlossen (im metrischen Raum $(\Omega, |\ |)$, $|\ |$ die euklidische Norm auf Ω), weil u stetig ist.

Wenn wir noch zeigen können, dass Ω_M offen ist, so folgt $\Omega = \Omega_M$ und damit $u(x) = M$ für alle $x \in \Omega$. (Denn: Ω ist als ein Gebiet, also als zusammenhängend vorausgesetzt. In diesem Fall sind die einzigen Teilmengen von Ω, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, Ω selbst und die leere Menge. Letzteres haben wir bereits ausgeschlossen.)

Nun sei $z \in \Omega_M$. Da u subharmonisch ist, existiert ein $R > 0$, so dass

$$u(z) \leq \frac{1}{\tau_n R^n} \cdot \int_{B_R(z)} u(x)\,dx$$

und damit

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\tau_n R^n} \cdot \int_{B_R(z)} (u(x) - M)\,dx \leq 0,$$

da $u(x) \leq M$. Es folgt

$$\int_{B_R(z)} \underbrace{u(x) - M}_{\leq 0}\,dx = 0 \underset{u \text{ ist stetig}}{\rightsquigarrow} u(x) - M = 0 \quad \forall x \in B_R(z).$$

Das bedeutet $B_R(z) \subset \Omega_M$, was die Offenheit von Ω_M beweist. $\square$

Fast unmittelbar ergibt sich daraus:

Satz 3 (schwaches Maximumprinzip für subharmonische Funktionen): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C(\overline{\Omega})$ in Ω subharmonisch. Dann nimmt u ihr Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.

Bew.: Behauptet werden die Identitäten

$$\sup\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\} \underset{(i)}{=} \sup\{u(x) : x \in \partial\Omega\} \underset{(ii)}{=} \max\{\quad \text{—} \quad \text{"} \quad \text{—} \quad\}.$$

(ii) folgt aus der Stetigkeit von u bis zum Rand und der Kompaktheit von $\partial\Omega$.

"$\geq$" in (i) ist klar, weil das Supremum über die größere Menge gebildet wird.

Nehmen wir in (i) $>$ an, so nimmt u im Innern ein Maximum an, es gibt also ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\{u(x) : x \in \Omega\}$. Nach Satz 2 ist u konstant, zunächst in Ω und wegen $u \in C(\overline{\Omega})$ auch auf $\overline{\Omega}$. Widerspruch zur Annahme. $\square$

Folgerungen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C(\bar{\Omega})$.

(1) Ist u superharmonisch, so gilt

$$\inf\{u(x) : x \in \bar{\Omega}\} = \min\{u(x) : x \in \partial\Omega\}.$$

(2) Ist u harmonisch, so gilt für alle $x \in \Omega$

$$\min\{u(z) : z \in \partial\Omega\} \leq u(x) \leq \max\{u(z) : z \in \partial\Omega\}$$

(2) in Worten: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, u harmonisch in Ω und stetig bis zum Rand, so nimmt u ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand an.

Aus dem schwachen Maximumprinzip erhalten wir einen Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-problem

$$u\big|_{\partial\Omega} = g \qquad (D)$$

zur Poissongleichung

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega. \qquad (P)$$

Satz 4: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von (D), (P). Dann ist u in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eindeutig bestimmt.

Bew.: Sei $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine weitere Lösung und $w := u - v$. Dann ist

$$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega \qquad \text{und } w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Nach Satz 3 nimmt die Funktion w ihr Minimum und ihr Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an. Aus $w|_{\partial\Omega} = 0$ folgt also $w(x) = 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$. □

Bem. Die Beschränktheit des Gebietes ist für Satz 4 (und also auch für Satz 3) eine unerlässliche Voraussetzung. Bsp.: Sei $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ mit $\partial\Omega = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ und

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x = (x', x_n) \mapsto u(x) = x_n$$

Dann ist $\Delta u = 0$ in Ω und $u|_{\partial\Omega} = 0$, aber $u \neq 0$.

Für den Fall der Laplace-Gleichung liefert das Maximumprinzip zugleich eine Aussage über die stetige Abhängigkeit der Lösung ~~von den~~ des Dirichlet-Problems von den Daten:

Bsp.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so dass zu jedem $g \in C(\partial\Omega)$ eine Lösung Sg von

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \qquad u\big|_{\partial\Omega} = g$$

existiert. (Später werden wir einen Existenzsatz zeigen und klären, für welche Gebiete das der Fall ist.) Die Eindeutigkeit haben wir gerade gezeigt, so dass

$$S : C(\partial\Omega) \longrightarrow C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \; g \longmapsto Sg$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung ist. Hierfür liefert das Maximumprinzip die folgende Stetigkeitsaussage:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |Sg(x)| = \|Sg\|_\infty \leq \|g\|_\infty = \sup_{x \in \partial\Omega} |g(x)|$$

übersetzt in Funktionenfolgen: Ist $(g_n)_n$ eine Folge von Daten in $C(\partial\Omega)$, die gleichmäßig gegen $g \in C(\partial\Omega)$ konvergiert, so konvergiert die Folge $(Sg_n)_n$ der zugehörigen Lösungen gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen die Lösung Sg von $\Delta u = 0$ zum Randwert $g \in C(\partial\Omega)$.