1.4 Sphärische Mittelwerte und die Darboux'sche Dgl.

Die sphärischen Mittelwerte werden uns den Einstieg liefern sowohl in die Analyse der Laplace-Gleichung wie auch zur Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung. Fritz John spricht in seinem Lehrbuch von der "Method of spherical means". Es ist ein kapitelübergreifendes Argument und steht daher bereits hier in der Einleitung. Worum geht's?

<u>Def.</u>: Sei $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $x \in \Omega$ und $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ und ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel. Dann heißt

$$M(x,r;f) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_n} \cdot \int_{|\xi|=1} f(x+r\xi)\, dS_\xi$$

der <u>sphärische Mittelwert von f über $\partial B_r(x)$</u>.

<u>Bem.</u>: (1) $\omega_n r^{n-1}$ ist die Oberfläche einer n-dim. Kugel vom Radius $r>0$, insofern handelt es sich tatsächlich um einen Mittelwert. Man benutzt bisweilen die Abkürzung

$$M(x,r;f) = \fint_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y .$$

(2) Die zweite Darstellung in der Definition erlaubt die symmetrische Fortsetzung für $r<0$: Wir haben

$$\int_{|\xi|=1} f(x+r\xi)\,dS_\xi = \int_{|\xi|=1} f(x-r\xi)\,dS_\xi$$

und daher vereinbaren wir $M(x,-r;f) := M(x,r;f)$.

Ferner ist wegen der Stetigkeit von f

$$|M(x,r;f)-f(x)| \le \sup_{|x-y|\le r} |f(x)-f(y)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

so dass auch die Konvention $M(x,0;f)=f(x)$ sinnvoll ist.

Erinnerung an Analysis III: Wie integriert man über Kugeln und Sphären?

(Referenzen beziehen sich auf meine Vorl. aus dem WS 20/21.)

Eine Anwendung der Transformationsformel ergab:

Abschnitt 2.5, Satz 10: Sei f auf $B_R(0)$ Lebesgue-integrierbar und $B=\{\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\in\mathbb{R}^n : |\xi'|<1\}$. Dann gilt mit $\xi_n=\sqrt{1-|\xi'|^2}$

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \left(\int_B \big(f(r\xi', r\xi_n)+f(r\xi',-r\xi_n)\big)\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}\,d\xi'\right)dr.$$

("räumliche Polarkoordinaten")

Das innere Integral $\int_B \dots d\xi'$ können wir als Integral über die Sphäre $\partial B_r(0)$ identifizieren.

(Etwas genauere Erklärung dazu:)

Das Integral über ein parametrisiertes Flächenstück

$$S = \{\varphi(t) : t \in \Omega'\} \qquad (\Omega' \subset \mathbb{R}^k,\ k \leq n-1)$$

mit einer injektiven C^1-Immersion (= Parametrisierung) φ haben wir erklärt als

$$\int_S f(y)\, dS_y := \int_{\Omega'} f(\varphi(t)) \sqrt{g_\varphi(t)}\, dt,$$

wobei $g_\varphi(t) := \det(D\varphi(t)^t D\varphi(t))$ die Gramsche Determinante der Parametrisierung φ ist. (Hierbei sei f der Einfachheit halber als stetig bis zum Rand und $\bar{S}$ als kompakt vorausgesetzt.)

Wendet man diese Definition an mit den Parametrisierungen

$$\varphi_\pm : B \longrightarrow H_r^\pm := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = r,\ y_n \gtrless 0\}$$

$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \longmapsto r\,(\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}}_{= \xi'}, \pm\sqrt{1-|\xi'|^2})$$

der nördlichen bzw. südlichen Hemisphäre vom Radius $r > 0$, so erhält man

$$\int_{H_r^\pm} f(y)\, dS_y = \int_B f(r\xi', \underbrace{\pm r\sqrt{1-|\xi'|^2}}_{\xi_n}) \sqrt{g_{\varphi_\pm}(\xi')}\, d\xi'.$$

Eine etwas längere Rechnung (Abschnitt 3.2, Bsp. 3) zeigt

$$\sqrt{g_{\varphi_\pm}(\xi')} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi'|^2}},$$

so dass sich das Integral über die gesamte Sphäre

$$\partial B_r(0) = H_r^+ + H_r^- + \text{Äquator}$$ ← $n-1$-dimensionale Nullmenge

vom Radius $r > 0$ ergibt als

$$\int_{\partial B_r(0)} f(y)\, dS_y = \int_B \left(f(r\xi', r\sqrt{1-|\xi'|^2}) + f(r\xi', -r\sqrt{1-|\xi'|^2}) \right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}\, d\xi'$$

$$= r^{n-1} \cdot \int_{\partial B_1(0)} f(r\xi)\, dS_\xi ,$$

was die Übereinstimmung der beiden Darstellungen in der Definition von $M(x,r;f)$ klärt.

Einsetzen in Satz 10 ergibt den folgenden Spezialfall der sog. "Coarea-Formel":

SEHR NÜTZLICH!

$$\int_{B_R(0)} f(y)\, dS_y = \int_0^R \Big(\int_{\partial B_r(0)} f(y)\, dS_y \Big)\, dr$$

(Mag man sich als Teilbild in Polarkoordinaten denken. Gibt es auch für andere Darstellungen räumlicher Bereiche als Vereinigung von Hyperflächenscharen. → Evans, Appendix C 3)

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Oberflächen- und Volumenintegralen wird hergestellt durch den Gauss'schen Integralsatz. Ich gebe eine gut merkbare Version mit unnötig starken Voraussetzungen an, die für unsere Zwecke ausreicht:

Gauss'scher Integralsatz ("Divergence Theorem"):

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt mit einem C^1-Rand ∂K. $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_x .$$

Erläuterungen: (1) $\operatorname{div} F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$. Im Fall, dass $F = \nabla u$ das Gradientenfeld einer C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist, nimmt der Integralsatz die Gestalt

$$\int_K \underbrace{\Delta u(x)}_{= \operatorname{div} \nabla u} dx = \int_{\partial K} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{= \langle \nabla u, \nu \rangle,\ \text{Richtungsableitung}} (x)\, dS_x$$

an.

(2) "C^1-Rand" bedeutet, dass sich ∂K überall lokal als Nullstellengebilde einer C^1-Funktion darstellen lässt. Hierbei kann man "überall" durch "fast überall" ersetzen. Eine $n-1$-dimensionale Nullmenge kann man von der Forderung ausnehmen und damit Ecken, Kanten usw. zulassen.

(3) $U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Umgebung von $x \in \partial K$. Dann wird in (2) die Existenz einer C^1-Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}$$

gefordert, so dass

$$K \cap U = \{ y \in U : f(y) \leq 0 \}$$

und insbes. $\partial K \cap U = \{ y \in U : f(y) = 0 \}$. Dann erhält man mit $\nu(x) := \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor (an ∂K in $x \in \partial K$), von dem im Satz die Rede ist.

Bsp.: $\overline{B_R(0)} = K = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{|x|^2 - R^2}_{} \leq 0 \}$

$$= f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - R^2$$

$\rightsquigarrow \nabla f(x) = 2x, \ \nu(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{R}$.

(In Übereinstimmung mit der Anschauung!)

Satz 1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Für $x \in \Omega$ und $|t| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ sei $v(x,t) := M(x,t;f)$. Dann gelten für $t \neq 0$:

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \cdot \int_{|x-y|<t} \Delta f(y)\, dy = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int_0^t \Big(\int_{|x-y|=s} \Delta f(y)\, dS_y \Big) ds$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + \frac{n-1}{t} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \Delta v(x,t).$$

Bem. Der Laplace-Operator in diesen Gleichungen bezieht sich nur auf die x-Variablen. – Die PDG in (2) wird als die Darboux'sche Dgl. bezeichnet.

Bew.: O.E. sei $t>0$ angenommen.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x+t\xi)\,dS_\xi = \frac{1}{\omega_n}\cdot\int_{|\xi|=1}\frac{\partial}{\partial t}(f(x+t\xi))\,dS_\xi$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\cdot\int_{|\xi|=1}\langle\nabla f(x+t\xi),\xi\rangle\,dS_\xi \quad \text{(Kettenregel)}$$

Hier ist $\nu(\xi)=\xi$, und für das Vektorfeld

$$F(\xi) = \nabla f(x+t\xi)$$

ist $\quad \operatorname{div} F(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(x+t\xi) = \Delta f(x+t\xi)\cdot t$, also

$$\ldots = \frac{t}{\omega_n}\cdot\int_{|\xi|\leq 1}\Delta f(x+t\xi)\,d\xi = \frac{1}{\omega_n\cdot t^{n-1}}\int_{|x-y|<t}\Delta f(y)\,dy$$

Letzteres stimmt nach der Coarea-Formel überein

mit $\quad \frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\cdot\int_0^t\left(\int_{|x-y|=s}\Delta f(y)\,dS_y\right)ds,$

womit der Teil (1) gezeigt ist. Jetzt leiten wir nochmal nach t ab, wobei wir die Produktregel beachten müssen:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = -\frac{n-1}{\omega_n t^n}\cdot\int_0^t\left(\int_{|x-y|=s}\Delta f(y)\,dS_y\right)ds$$

Hauptsatz $\quad + \frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\int_{|x-y|=t}\Delta f(y)\,dS_y \quad = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\Delta f(x+t\xi)\,dS_\xi$

$$= -\frac{n-1}{t}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \Delta v(x,t).$$

(Die Vertauschung von Diff. und Int. ist gerechtfertigt, weil die Sphäre kompakt und der Integrand C^2 ist.) □