1.3 Klassifizierung linearer pDG 2. Ordnung

Wir betrachten Gleichungen der Gestalt $Lu = f$ mit einem linearen Differentialoperator

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

mit variablen Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ (im Moment ohne Regularitätsvoraussetzungen), wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist. Die Klassifizierung wird bestimmt durch die Terme mit den höchsten Ableitungen, also durch die Matrix $A(x) := (a_{ij}(x))_{1 \le i,j \le n}$. Diese nehmen wir stets als symmetrisch an, andernfalls setzen wir $\tilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ und erhalten nach dem Satz von Schwarz denselben Differentialoperator L.

Def.: Für eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ heißt

$$D := \dim \operatorname{Ker}(A) = \# \{ i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = 0 \}$$

der Defektindex und

$$T := \# \{ i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i < 0 \}$$

der Trägheitsindex. Als Defekt- bzw. Trägheitsindex der Gleichung $Lu = f$ verstehen wir die entsprechenden Indizes der Matrix $A(x)$, mit der der Hauptteil von L gebildet wird.

Def.: Eine lineare pDG 2. Ordnung heißt

(1) elliptisch, wenn $D=0$ und $T=0$ oder $T=n$,

(2) parabolisch, wenn $D>0$,

(3) hyperbolisch, wenn $D=0$ und $T=1$ oder $T=n-1$,

(4) ultrahyperbolisch, wenn $D=0$ und $2 \leq T \leq n-2$ ist.

Bem.: (1) Bei variablen Koeffizienten handelt es sich um punktweise Eigenschaften von L. Eine solche pDG kann in Teilen von Ω elliptisch und in anderen parabolisch bzw. (ultra-) hyperbolisch sein.

(2) $Lu=f$ ist elliptisch genau dann, wenn die zugeordnete Matrix $A(x)$ definit ist (positiv oder negativ).

(3) Der Fall $n=2$ ist besonders einfach. Ultrahyperbolische Gleichungen gibt es dann nicht und

$$L \text{ ist } \begin{cases} \text{elliptisch} \Leftrightarrow \det A > 0, \\ \text{parabolisch} \Leftrightarrow \det A = 0, \\ \text{hyperbolisch} \Leftrightarrow \det A < 0. \end{cases}$$

Bsp.: Die Hauptvertreter im Fall konstanter Koeffizienten (15)

(1) <u>elliptisch</u>: $\Delta u = f$, Poisson-/Laplace-Gl. ($f=0$)

$(\Delta + k^2) u = 0$, Helmholtzgleichung

(Hier ist $A = E_n$, alle Eigenwerte sind 1.)

(2) <u>parabolisch</u>: Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \; (+f) \qquad (\text{ggf.} = \Delta_x u + f)$$

hat den $n+1$ Variablen $t, x_1, \dots, x_n$. Die zugeordnete Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \; -1 \end{pmatrix}$.

(3) <u>hyperbolisch</u>: Die Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = f \qquad (\text{auch hier } \Delta = \Delta_x!)$$

und die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right) u = f, \; m \in \mathbb{R}.$$

Zugeordnete Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \; -1 \end{pmatrix}$.

(4) <u>ultrahyperbolisch</u>: $\Delta_x u = \Delta_y u$, $u : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$

Vor- und Nachteile dieser Klassifizierung:

- Sie gibt zumindest einen Anhaltspunkt dafür, welche Probleme für eine gegebene Gleichung wohlgestellt sind. Faustregel: Randwertprobleme für elliptische, Anfangswertprobleme für parabolische und hyperbolische pDG.

- Manche Methoden, die für eine spezielle Gleichung entwickelt werden, lassen sich auf die gesamte Klasse verallgemeinern, während sie bei Gln. anderen Typs versagen. Z.B. sind Maximumprinzipien (die zur Eindeutigkeit führen) bei elliptischen und parabolischen Gleichungen zu erwarten, nicht jedoch bei (ultra-) hyperbolischen.

- Wichtige Dgln. der modernen mathematischen Physik sind in dieses Schema nicht sinnvoll einzuordnen. Z.B. ist die (hom. lin.) Schrödinger-Gleichung

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u = 0$$

formal parabolisch. Ihre Lösungen verhalten sich aber in verschiedener Hinsicht wie diejenigen einer Wellengleichung.