1.2 Wohlgestellte Probleme

Differenzialgleichungen – partielle ebenso wie gewöhnliche – dienen der Beschreibung deterministischer Prozesse. Das Ziel dabei ist die Vorhersage der Entwicklung eines Systems, das vollständig festgelegt ist durch

(Natur-)gesetze in Form von Dgln.

und

Anfangs- (oder Rand-) Zustand bei einer Messung

erlaubt ⟶ Vorhersage

zukünftiges Verhalten oder Verhalten im Innern eines Gebiets

Die Möglichkeit der Vorhersage erfordert

(1) die Existenz einer Lösung einer Dgl. zu gegebenen Daten (d.h. Anfangs- bzw. Randwerte),

(2) die Eindeutigkeit dieser Lösung,

(3) die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.

Sind diese drei Bedingungen erfüllt, spricht man von einem <u>wohlgestellten Problem</u>, andernfalls von einem schlecht oder nicht wohlgestellten Problem. (Engl. well-posed >–< ill-posed) Der Begriff geht zurück auf Hadamard. Soweit ist das prägnant und gut merkbar formuliert, einige genauere Erläuterungen können jedoch nicht schaden: (9)

Zu (1) Die Forderung nach Existenz einer Lösung hat zu verschiedenen schwächeren Lösungsbegriffen(*) geführt.

Bsp.: $\frac{du}{dx} = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ "Heaviside-Funktion", hierbei $x \in \mathbb{R}$, also eine ODE

besitzt auf keinem Intervall um $x_0 = 0$ eine klassische Lösung, weil H dort unstetig ist. Dennoch würden wir $u(x) := \max(0,x)$ im wesentlichen als Lösung akzeptieren. u erfüllt auch zwei wesentliche Eigenschaften klassischer Lösungen:

(i) Die Regel der partiellen Integration ist erfüllt. Für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ haben wir

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$= x \cdot \varphi(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

(*) und darüber hinaus zu neuen Ableitungsbegriffen

Ist u eine lokal integrierbare Funktion, die einer solchen Bedingung (ggf. mit mehreren partiellen Integrationen, je nach Dgl.) genügt, so spricht man von einer <u>schwachen Lösung</u> einer Dgl.

(ii) Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dx}(x) = f(x) \qquad u(x_0) = y_0 ,$$

so ist dies für stetige Funktionen f äquivalent zur Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt . \qquad (*)$$

Die rechte Seite ist bereits definiert, wenn f lokal integrierbar ist. Ist dies erfüllt und u wie in $(*)$, so nennt man u eine <u>milde Lösung</u> des Anfangswertproblems.

Konkret mit $f = H$ und $x_0 = y_0 = 0$:

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{x} H(t)\,dt = \max(x,0),$$

d.h. es liegt auch eine milde Lösung des AWP vor.

(iii) Ein noch schwächerer Lösungsbegriff ist der der Distributionslösung. Hierbei muss die rechte Seite nicht einmal lokal integrierbar sein, z.B. sind auch Maße zugelassen.

(Bem.: In dieser einf. Vorl. fast immer klassische Lösungen → deren Integraldarstellungen)

Zu (2): Die Behauptung der Eindeutigkeit der Lösung eines Rand- oder Anfangswertproblems zu einer gegebenen Dgl. ist unvollständig ohne Angabe der Funktionenklasse, in der Eindeutigkeit vorliegt. Das Problem ist nicht spezifisch für Dgln., daher ein triviales Bsp.: Die Aussage

" Die Gleichung $x^2 = -1$ ist eindeutig lösbar."

ist weder falsch noch wahr, sondern unvollständig. In $\mathbb{R}$: keine Lösung; in $\mathbb{C}$: zwei Lösungen; aber in der oberen Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ gibt es genau eine Lösung.

Bei klassischen Lösungen partieller Dgln. ist die Sache jedoch relativ einfach: Stets wird im Innern des Definitionsbereichs die k-mal stetige D'barkeit verlangt/vorausgesetzt. Die Randregularität ist von Fall zu Fall zu spezifizieren.

Zu (3): Sind die Punkte (1) und (2) erledigt, so existiert eine Abbildung

S : Datenraum $\longrightarrow$ Lösungsraum $\subset$ Funktionenraum, in dem Eindeutigkeit vorliegt

"solution operator"

$\left.\begin{matrix}\text{Anfangs}\\ \text{Rand}\end{matrix}\right\}$-werte (Daten) $\longmapsto$ eindeutige Lösung

Unter "stetiger Abhängigkeit" ist also die Stetigkeit des Lösungsoperators S zu verstehen. Dazu müssen Daten- und Lösungsraum metrische (zumindest: topologische) Räume sein (sonst ist Stetigkeit nicht definiert).

Ist eine lineare pDG gegeben, wählt man als Daten- und Lösungsraum einen topologischen Vektorraum (nach Möglichkeit normiert), so dass S zu einer stetigen linearen Abbildung wird.

Die genauere Untersuchung ~~[illegible]~~ der Regularität von S führt zu einer Differenzierung des Begriffs der Wohlgestelltheit. Ist z.B. S N-mal stetig diff'bar, so spricht man von C^N-Wohlgestelltheit u.ä..