Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

1. Einleitung

1.1 Grundbegriffe und Beispiele

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, die partielle Ableitungen enthält. Etwas genauer:

<u>Def.</u>: Es seien $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$F(\nabla^k u, \nabla^{k-1} u, \dots, \nabla u, u, x) = 0 \qquad (pDG)$$

eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung.
Hierbei sind $x \in \Omega$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$ etc.

$u \in C^k(\Omega)$ heißt eine klassische Lösung von (pDG), wenn diese Gleichung in jedem $x \in \Omega$ erfüllt ist.

<u>Bem.</u>: (1) Der Zusatz "klassisch" nimmt vorweg, dass es auch andere, schwächere Lösungsbegriffe gibt, dazu später (ein wenig) mehr.

(2) Eine allgemeine Theorie partieller Dglen. oder

Form (pDG) gibt es nicht. Wir unterscheiden verschiedene Typen, je nach Grad ihrer Nichtlinearität.

Def.: Eine pDG heißt <u>linear</u>, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|\leq k} f_\alpha(x)\, \nabla^\alpha u(x) = f(x)$$

hat. Hierbei erstreckt sich die Summe über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ der Länge $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$. f_α ist eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen $x \in \Omega$, $\nabla^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. Eine lineare pDG heißt <u>homogen</u>, falls $f = 0$, andernfalls <u>inhomogen</u>.

Bem.: Die Gesamtheit aller Lösungen einer linearen pDG bildet einen i. allg. ∞-dimensionalen affinen Teilraum von $C^k(\Omega)$. Im Fall einer homogenen linearen Gleichung handelt es sich um einen Untervektorraum.

Bspe.: (1) Die <u>Laplace-Gleichung</u>

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

ist eine homogene lineare pDG. 2. Ordnung. Sie ist die Grundgleichung der Elektrostatik, tritt aber auch in anderen Teilgebieten der Physik auf.

Ihre Lösungen nennen wir harmonische Funktionen. ③
Der Differentialoperator Δ heißt der Laplace-Operator.
Die inhomogene Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad \text{mit } f \neq 0$$

wird die Poisson-Gleichung genannt. Diese beiden Gleichungen werden uns in Kap. 2 der Vorlesung beschäftigen.

(2) Verallgemeinerungen der Laplace-Gleichung:

(2.1) Polyharmonische Gleichung $\Delta^m u = 0$ mit $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 2$: Biharmonische Gleichung.

(2.2) Helmholtzsche Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad (k \in \mathbb{R}),$$

ebenfalls eine homogene lineare PDG 2. Ordnung. Auf diese wird man z.B. geführt, wenn man versucht, die

(3) homogene lineare Wellengleichung

$$\Box u(x,t) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right)(x,t) = 0$$

„Box-" oder „d'Alembert-" Operator

mit dem Produktansatz

$$u(x,t) = e^{itk} f_k(x) \rightsquigarrow -k^2 f_k(x) - \Delta f_k(x) = 0$$

zu lösen.

(4) Die allgemeine Form der lineare pDG 2. Ordnung

ist $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x) u(x) = f(x).$

Mit solchen Glen. werden wir uns ganz überwiegend beschäftigen.

Neben den linearen pDG gibt es die i. allg. wesentlich schwierigeren nichtlinearen pDG. Hierbei existieren graduelle Unterschiede, je nachdem, wie die Funktion F in der allgemeinen Def. von den höchsten auftretenden Ableitungen abhängt. Wir unterscheiden

Def.: Eine nichtlineare pDG heißt

(1) semilinear, wenn sie von der Gestalt

$$\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha(x) \nabla^\alpha u(x) + f_0(\nabla^{k-1} u(x), \dots, u(x), x) = 0$$

ist,

(2) quasilinear, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha(\nabla^{k-1} u, \dots, u, x) \nabla^\alpha u(x) + f_0(\nabla^{k-1} u(x), \dots, u(x), x) = 0$$

hat, und schließlich

(3) voll nichtlinear, wenn sie nichtlinear von den höchsten auftretenden Ableitungen abhängt.

Bspe.: (1) Die semilineare Poissongleichung

$$\Delta u(x) = f(u(x), x),$$

ebenfalls semilinear sind die folgenden Bspe. nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen E

$$i u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(u(x,t)) \qquad (NLS)$$

$$i u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(u(x,t), \nabla u(x,t)) \qquad (DNLS)$$

(2) Ein gut untersuchtes Beispiel einer quasilinearen pDG ist die Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2}\right)(x) = 0,$$

dabei ist für ein diff.bares Vektorfeld $F = (F_1, .., F_n)$

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

Lösungen dieser Gleichung können durch Seifenhautexperimente eindrucksvoll dargestellt werden. Interpretation der Gleichung: Die Fläche des Graphen einer Lösung u wird unter gegebenen Randbedingungen minimal, wenn die mittlere Krümmung dieses Graphen, das ist die linke Seite der Gleichung, verschwindet.

(3) Schließlich ist die Monge-Ampère-Gleichung

$$\det(\operatorname{Hess} u(x)) = f(x)$$

ein Bsp. für eine voll nichtlineare PDG 2. Ordnung. Sie beschreibt Flächen(*) vorgegebener Gauss'scher Krümmung (= Produkt der Hauptkrümmungen, das sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix).

(*) Graphen der Lösungen u der Gleichung.

(In Abschnitt 1.2 des Buches von Evans finden Sie eine Vielzahl weiterer Bspe..)

Unter den nichtlinearen PDG sind die semilinearen noch am leichtesten zu untersuchen. Das gelingt oft dadurch, dass man den nichtlinearen Anteil als "kleine" Störung des linearen Hauptteils behandelt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine nichtlineare PDG durch eine geschickt gewählte Transformation auf eine lineare zurückzuführen – hierbei ist Kreativität gefragt. Dies funktioniert am häufigsten auch bei semilinearen Problemen.

<u>Bsp.</u>: Die "viskose" Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (x,t \in \mathbb{R})$$

ist eine semilineare Gleichung. $\underbrace{\nu}_{\geq 0}$ ist der Viskositätsparameter, für $\nu = 0$ spricht man von der "unviskosen Burgers-Gleichung (engl.: "inviscid B.e.").

Sei $\nu \neq 0$. Zunächst führt man

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{x} u(y,t)\,dy\,, \quad \text{d.h.}\ \frac{\partial v}{\partial x} = u$$

ein, wobei man optimistisch die Existenz des Integrals für die gesuchte Lösung voraussetzt. Ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (*)$$

immer noch semi linear.

Nun setzt man $w := e^{-\frac{v}{2\nu}}$ (sog. "Cole-Hopf-Transf.")

$$\rightsquigarrow \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\nu} \cdot e^{-\frac{v}{2\nu}} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

jetzt erinnert man an, dass v $(*)$ löst

$$= -\frac{1}{2\nu}\, e^{-\frac{v}{2\nu}}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

Andererseits: $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2\nu} \cdot e^{-\frac{v}{2\nu}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ und

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\nu} \cdot e^{-\frac{v}{2\nu}}\left(-\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \text{ so dass}$$

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\nu}\, e^{-\frac{v}{2\nu}}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

w ist dann eine Lösung der (linearen!) Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ in 1+1 Dimensionen. Wenn wir diese verstanden haben (Kap. 3), können wir auch die Burgers-Gleichung lösen, indem wir die obige Rechnung umkehren.