2.4 Die lokale H^s-Theorie, $s>0$

Wenn wir die bisher entwickelte L^2-Theorie auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s\geq 0$ verallgemeinern wollen mit dem Ziel, größere Exponenten $p \geq 1+\frac{4}{n}$ zulassen zu können, stoßen wir auf das Problem, Terme der Form

$$\| |u|^{p-1}u \|_{s,q}, \quad \text{oder allgemeiner} \quad \|N(u)\|_{s,q},$$

bzw. zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft

$$\|N(u)-N(v)\|_{s,q},$$

abzuschätzen. In der Tat will man für

$$\Lambda u(t) = e^{it\Delta}u_0 \mp i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}N(u(t'))dt'$$

zeigen, dass $\Lambda : B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist für

$$B_{R,T} := \{u \in L^r_T(H^s_q) : \|u\|_{L^r_T(H^s_q)} := \|J^s u\|_{L^r_T(L^q_x)} \leq R\},$$

und nach Anwendung der Strichartz-Abschätzungen ((r,q) sei Schrödinger-admissible) hat man

$$\|\Lambda u\|_{L^r_T(H^s_q)} \lesssim \|u_0\|_{s,2} + \|N(u)\|_{L^{r'}_T(H^s_{q'})}$$

und der zweite Summand lautet ausgeschrieben

$$\|N(u)\|_{L^{r'}_T(H^s_{q'})} = \left(\int_{-T}^T \|J^s N(u(t))\|^{r'}_{L^{q'}_x} dt\right)^{\frac{1}{r'}},$$

so dass man bei festem t für die innere Norm (bei festem t) genau solche Terme verarbeiten muss, wie oben genannt. Für $s \in \mathbb{N}$ kann man Sobolevnormen (im eigentlichen Sinne) verwenden, d.h. man hat

$$\| N(u) \|_{s,q'} \sim \sum_{|\alpha| \le s} \| \nabla^\alpha N(u) \|_{q'} ,$$

wobei mit Ketten- und Produktregel

$$\nabla^\alpha N(u) = \sum_{j=0}^{|\alpha|} \sum_{\sum_{i=1}^{j} |\beta_i| \le |\alpha|} c_{j,\beta} \, N^{(j)}(u) \cdot \nabla^{\beta_1} u \cdots \nabla^{\beta_j} u$$

und über jeden dieser Summanden kann man sich dran mit Hölder- und Sobolev-Ungleichungen hermachen. Das kann kompliziert werden, ein wesentliches Problem entsteht aber eigentlich nur dann, wenn die äußere Funktion N nicht hinreichend oft differenzierbar ist. (Für $|\alpha| = 1$ haben Sie das in der Übung bereits gemacht, das war noch nicht wirklich kompliziert.) Für $s \notin \mathbb{N}$ benötigt man Ungleichungen, die ein ähnliches Vorgehen erlauben, z.B.

"<u>generalized</u> <u>chain rule</u>": Es sei $n = 1$ *, $s \in (0,1)$, $r, r_1, r_2 \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Dann gilt

$$\| |D_x|^s N(u) \|_r \lesssim \| N'(u) \|_{r_1} \, \| |D_x|^s u \|_{r_2}$$

(Kenig, Ponce, Vega, 1993, Appendix. Thm. A6)

* höherdimensionale Versionen sind mir – nicht-zitierfähig – bekannt

Beweis für Produkte ist eine entsprechende Ungleichung keineswegs einfach. Soweit ich weiß, ist das erste derartige Ergebnis das folgende:

Kato-Ponce commutator estimate (1988):

$$\| J^s(f\cdot g) - f(J^s g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim$$

$$\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|J^{s-1} g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|J^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Etwas handlicher ist die folgende "generalized" oder "fractional Leibniz rule":

<u>Theorem</u> 1: Es seien $s>0$, $1<r<\infty$, $1<p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ und $p_2, q_1 < \infty$. Dann gilt

$$\| J^s(f\cdot g)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \|J^s g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \|J^s f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}$$

Eine entsprechende Abschätzung mit I^s anstelle von J^s gilt unter denselben Voraussetzungen.

<u>Bem.</u>: Abschätzungen dieser Art, insbesondere für gewisse $r<1$ sind bis heute Gegenstand der Forschung. Siehe etwa Vol II des "Harmonic Analysis" von Muscalu-Schlag, oder den Artikel "The Kato-Ponce inequality" von Grafakos-Oh aus 2013 (arXiv).

Ich möchte hier einen vergleichsweise einfachen Fall von Thm. 1 beweisen, nämlich

- die inhomogene Version mit $\mathcal{J}^s$ (nicht mit I^s), und diese
- unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $1 < r, p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$.

Dieser Beweis benötigt im wesentlichen (nur) zwei Hilfsmittel:

(1) Den Satz von Littlewood-Paley:

für $1<p<\infty$ ist $\|f\|_p \sim \|(|P_0 f|^2 + \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |P_{\Delta K} f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$

bzw. $\|f\|_{s,p} \sim \|(|P_0 f|^2 + \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$ als äquivalente Norm auf H^s_p (unter derselben Voraussetzung $1<p<\infty$).

Hierbei:

$$P_{\Delta K} = \psi_K * = c_n \mathcal{F}^{-1} \hat{\psi}_K \mathcal{F} \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{supp} \hat{\psi}_1 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1-\varepsilon_0 \le |\xi| \le 2\}, \quad \hat{\psi}_K(\xi) = \hat{\psi}_1(\tfrac{\xi}{K}),$$

d.h. $\psi_K(x) = K^n \psi_1(Kx)$, und

$$P_0 = \phi * = c_n \mathcal{F}^{-1} \hat{\phi} \mathcal{F} \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{supp} \hat{\phi} \subset \{\xi : |\xi| \le 1\}, \quad \hat{\phi}, \hat{\psi}_1 \text{ radial}, C^\infty_c,$$

so dass $P_0 f + \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} P_{\Delta K} f = f$ mit Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$;

$$P_K = P_0 + \sum_{L \le K} P_{\Delta L}, \quad \tilde{P}_{\Delta K} = P_{\Delta \frac{K}{2}} + P_{\Delta K} + P_{\Delta 2K} \quad (\Rightarrow P_{\Delta K} = P_{\Delta K} \tilde{P}_{\Delta K})$$

$$P_K =: \phi_K * \text{ mit } \operatorname{supp} \hat{\phi}_K \subset \{\xi : |\xi| \le 2K\}, \quad \hat{\phi}_K \in C^\infty_c, \text{ radial.}$$

(2) Die Hardy-Littlewood-Maximal-Funktion, definiert für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$Mf(x) := \sup_{R>0} \fint_{B_R(x)} |f(y)|\,dy, \quad \fint_{B_R(x)} \dots dy = \frac{1}{\tau_n R^n} \int_{B_R(x)} \dots dy,$$

dies ist ein beschränkter sublinearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, sofern $1 < p \leq \infty$, d.h. wir haben

$$\| Mf \|_p \lesssim c_p \, \|f\|_p, \text{ falls } 1 < p \leq \infty.$$

(Vorlesung harmonic analysis, Abschnitt 2.4.2, Satz 3, oder z.B. Grafakos, "Classical" (Stichwort)). Ferner gilt für $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit radial fallender Majorante $\tilde{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$|K| * |f|(x) \leq c \, \|\tilde{K}\|_1 \cdot Mf(x).$$

(ebda., Satz 4, oder auch z.B. Grafakos.)

Damit ausgestattet, kommen wir zum

Beweis der (einfachen Version der) "generalized Leibniz rule":

1. Vorab stellen wir fest, dass für ein beliebiges $f \in H^s_p$

$$\|f\|_{s,p} = \|P_0 f\|_{s,p} + \|(I-P_0)f\|_{s,p} \quad \text{mit}$$

$$\|P_0 f\|_{s,p} \underbrace{\lesssim}_{\text{äquivalente Norm, wie o. angegeben}} \|P_1 f\|_p \lesssim \|\Phi_1 * f\|_p \leq \|\Phi_1\|_1 \, \|f\|_p \lesssim \|f\|_p$$

und

$$\|(I-P_0)f\|_{s,p} \lesssim \Big\| \Big(\sum_{k \in 2^{\mathbb{N}_0}} |k^s P_{\Delta k} \overset{(I-P_0)}{\overset{\vee}{f}} |^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p$$

$$\lesssim \Big\| \Big(\sum_{k \in 2^{\mathbb{Z}}} |k^s P_{\Delta k} (I-P_0) f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \underbrace{\lesssim}_{\text{äquivalente homogene Sobolev-Norm}} \|I^s (I-P_0) f\|_p \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s_p}$$

(kurz: $\|f\|_{s,p} \lesssim \|f\|_p + \|I^s f\|_p$, andere Richtung gilt auch (für $s>0$ natürlich), so dass man sagen kann

$$H_p^s = L^p \cap \dot{H}_p^s,$$

wenn man ignoriert, dass die Objekte in $\dot{H}_p^s$ eigentlich andere sind als die in H_p^s.)

2. $\|P_0(fg)\|_{H_r^s} \lesssim \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2} \leq \|f\|_{p_1}\|J^s g\|_{p_2}$

und wir müssen im folgenden nur noch $\|I^s(fg)\|_r$ abschätzen.

3. Zerlegung von $f\cdot g$ in ein sog. "Paraprodukt":

$$f\cdot g = (P_0 f)\cdot(P_0 g) + (P_0 f)\cdot\sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta k} g) + \sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta k} f)\cdot(P_0 g)$$

$$+ \sum_{k_1,k_2\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta k} f)(P_{\Delta k} g) =: I + II + III + \Sigma$$

wobei $\|(P_0 f)(P_0 g)\|_{s,r} = \|P_1((P_0 f)\cdot(P_0 g))\|_{s,r}$

wie oben $\lesssim \|(P_0 f)(P_0 g)\|_r \leq \|P_0 f\|_{p_1}\|P_0 g\|_{p_2} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}$

4. Abschätzung von II (bzw III, beachte die Symmetrie bei $f\longleftrightarrow g$):
Den Term für $k=2$ kann man nochmal wie in 3. abschätzen.
Für den Rest hat man

$$\sum_{\substack{k\in 2^{\mathbb{N}}\\ k\geq 4}}(P_{\Delta k} f)\cdot(P_0 g) = \sum_{k\geq 4}\tilde{P}_{\Delta k}((P_{\Delta k} f)(P_0 g))$$

und die H_r^s-Norm hiervon verarbeitet man "by duality":

$$\| \sum_{K\geq 4} \tilde{P}_{\Delta K}((P_{\Delta K} f)(P_0 g)) \|_{s,r}$$

$$\lesssim \| \underset{|D_x|^s}{\underset{\|}{I^s}} \sum_{K\geq 4} \tilde{P}_{\Delta K}((P_{\Delta K} f)(P_0 g)) \|_r$$

$$= \sup_{\substack{h\in S(\mathbb{R}^n) \\ \|h\|_{r'}\leq 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, I^s \sum_{K\geq 4} \tilde{P}_{\Delta K}((P_{\Delta K} f)(P_0 g))(x)\, dx \right|$$

und das Integral kann für ein solches h weiterhin abgeschätzt werden durch

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (I^s h)(x) \cdot \sum_{K\geq 4} \dots \, dx \right|$$

$$= \left| \sum_{K\geq 4} \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{P}_{\Delta K} I^s h)(x) \cdot (P_{\Delta K} f)(x) \cdot (P_0 g)(x) \, dx \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{K\geq 4} (K^{-s} \tilde{P}_{\Delta K} I^s h)(x) \, (K^s P_{\Delta K} f)(x) \, (P_0 g)(x)\, dx \right|$$

$$\underset{\Delta\text{'s- und C.S.-Ungl.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s} \tilde{P}_{\Delta K} I^s h(x)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f(x)|^2 \Big)^{1/2} \cdot |P_0 g(x)| \, dx$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\lesssim} \Big\| \Big(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s} \tilde{P}_{\Delta K} I^s h|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{r'} \Big\| \Big(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{q_1} \| P_0 g \|_{q_2},$$

wobei: 1. Faktor $\lesssim \| I^s h \|_{\dot{H}^{-s}_{r'}} \lesssim \|h\|_{r'} \leq 1$

2. Faktor $\lesssim \| f \|_{\dot{H}^{s,q_1}}$ und 3. Faktor $\lesssim \|g\|_{q_2}$.

5. Zerlegung von Σ: Wir schreiben

$$\Sigma = \sum_{\substack{k_1,k_2\in 2^{\mathbb{N}}\\ k_1\le \frac{k_2}{4}}} + \sum_{\substack{k_{1,2}\in 2^{\mathbb{N}}\\ k_1\sim k_2}} + \sum_{\substack{k_{1,2}\in 2^{\mathbb{N}}\\ k_2\le \frac{k_1}{4}}} (P_{\Delta k_1} f)(P_{\Delta k_2} g) = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$$

mit

$$\Sigma_1 = \sum_{k_2\in 2^{\mathbb{N}}} (P_{\frac{k_2}{4}} f)(P_{\Delta k_2} g) = \sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} \tilde{P}_{\Delta k}\big((P_{\frac{k}{4}} f)(P_{\Delta k} g)\big)$$

und

$$\Sigma_2 = \sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} P_{4k}\big((P_{\Delta k} f)(\tilde{P}_{\Delta k} g)\big)$$

Ggf. schätzt man den Beitrag für $k=2$ gesondert ab. Σ_3 entsteht aus Σ_1 durch Vertauschung von f und g, ist also genauso zu behandeln.

6. Abschätzung von Σ_1 "by duality". Dazu sei $h\in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_{r'}\le 1$.

Dann haben wir

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, I^s\Sigma_1(x)\,dx\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (I^s h)(x) \sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} \tilde{P}_{\Delta k}\big((P_{\frac{k}{4}} f)(P_{\Delta k} g)\big)(x)\,dx\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} \int_{\mathbb{R}^n} (k^{-s}\tilde{P}_{\Delta k} I^s h)(x)\; P_{\frac{k}{4}} f(x)\; k^s P_{\Delta k} g(x)\,dx\Big|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} |k^{-s}\tilde{P}_{\Delta k} I^s h(x)|^2\Big)^{1/2} \cdot \sup_{k\in 2^{\mathbb{N}}} |P_k f(x)| \cdot \ldots$$

$$\Big(\sum_{k\in 2^{\mathbb{N}}} |k^s P_{\Delta k} g(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\underset{L.P.}{\lesssim} \|I^s h\|_{\dot{H}^{-s}_{r'}} \cdot \|\sup_k |P_k f|\|_{p_1}\, \|g\|_{s,p_2}$$

Für den mittleren Term beachten wir $P_k f = \Phi_k * f$, $\Phi_k(x) = k^n\Phi_1(kx)$, $\Phi_1\in S(\mathbb{R}^n)$ radial, so dass wir o.E. Φ_k als radial fallend annehmen können. Dann ist $|P_k f(x)| \lesssim \|\Phi_k\|_1\, Mf(x) \lesssim Mf(x)$, unabhängig von k.

so dass $\sup_k |P_k f(x)| \lesssim Mf(x)$ und also

$$\| \sup_k |P_k f| \|_{p_1} \lesssim \| Mf \|_{p_1} \lesssim \|f\|_{p_1} .$$

Zsf. liefert für den Betrag von Σ_1 die obere Schranke

$$\underbrace{\|h\|_{r'}}_{\leq 1} \cdot \|f\|_{p_1} \|g\|_{s,p_2} .$$

7. Abschätzung von Σ_2. Dazu beachten wir, dass wir $P_0 \Sigma_2$ oben bereits abgeschätzt haben und setzen $Q_k := P_{4k} - P_0$.

Für $h \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_{r'} \leq 1$ erhalten wir dann

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, I^s (I - P_0) \Sigma_2 (x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} I^s h(x) \sum_{k \in 2^{\mathbb{N}}} Q_k ((P_{\Delta k} f)(P^2_{\Delta k} g))(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \sum_{k \in 2^{\mathbb{N}}} \int_{\mathbb{R}^n} k^{-s} Q_k I^s h(x)\; k^s P_{\Delta k} f(x)\; P^2_{\Delta k} g(x)\, dx \right|$$

$$\underset{\text{C.S.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_k |k^{-s} Q_k I^s h(x)| \cdot \Big(\sum_{k \in 2^{\mathbb{N}}} |k^s P_{\Delta k} f(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k \in 2^{\mathbb{N}}} |P^2_{\Delta k} g(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx$$

Mit Hölder und Littlewood-Paley ist dies wiederum

$$\lesssim \| \sup_k |k^{-s} Q_k I^s h| \|_{r'}\; \|f\|_{s,q_1} \|g\|_{q_2} ,$$ wobei

$$Q_k I^s h = \mathcal{F}^{-1} \underbrace{(\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_0)}_{0 \notin \operatorname{supp}} |\xi|^s \mathcal{F} h = \underbrace{(I^s(\phi_k - \phi_0))}_{\in S(\mathbb{R}^n),\ \text{radial}} * h ,$$ so dass

wir dies nach O.E. als radialfallend annehmen können.

Mit $\|I^s \phi_k\|_1 \lesssim k^s$ ergibt die Max. fct.-Abschätzung

1. Faktor $\lesssim \|h\|_{r'} \leq 1$ und damit die Beh. $\square$

Wenn wir jetzt Strichartz-Abschätzungen einerseits und andererseits "fractional Leibniz" und Sobolev-/Hölder-Ungleichungen miteinander verbinden, können wir das folgende Ergebnis zur LWP erzielen:

Satz 1: Es seien $p>1$ ungerade, $s \geq s_c = \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^4)$ und $r = p+1$ sowie $\frac{4}{q} = \frac{4}{2} - \frac{2}{r} \left(= \frac{4}{2} - \frac{2}{p+1}\right)$. Dann existiert ein $T = T(u_0) > 0$ und eine Lösung

$$u \in C([-T,T], H^s) \cap L_T^r(H_q^s)$$

von (NLS) mit Exponent p und $u(t=0) = u_0$. Diese ist eindeutig in $L_T^r(H_q^s)$ und die Abbildung $S: u_0 \longmapsto u$ (Daten auf Lösungen) ist stetig.

Bem.: (1) Im subkritischen Fall ist $T = T(\|u_0\|_{s,2})$, und S ist Lipschitz auf Kugeln im Datenraum $H^s(\mathbb{R}^4)$.

(2) Im kritischen Fall hängt $T = T(u_0)$ in folgender Weise von u_0 ab: Zu $R>0$ gibt es ein $T>0$, so dass für alle $u_0 \in D_{T,R} := \{u_0 \in H^s(\mathbb{R}^4) : \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_T^r(H_q^s)} \leq R\}$ eine Lösung u mit Lebensdauer T existiert. Auf diesen Mengen ist der (jeweilige) Lösungsoperator Lipschitz.

(3) Globale Lösungen bei kleinen Daten und nonlinear small data scattering lassen sich in ähnlicher Weise (auch im subkritischen Fall $s > s_c$, sofern $p \geq 1 + \frac{4}{4}$ ist) zeigen.

Da die Argumente für den subkritischen Fall (bis auf die Verwendung von "generalized Leibniz") Gegenstand von "Problem 9." der Übungen sind, beschränke ich mich hier auf den:

Bew. für den kritischen Fall: Ähnlich wie in früheren Beweisen setzen wir

$$B_{R,T} := \{ u \in L^r_T(H^s_q) : \|u\|_{L^r_T(H^s_q)} \leq R \}$$

und, für $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$\Lambda_{u_0} u(t) := e^{it\Delta} u_0 \mp i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} N(u(t'))\, dt',$$

wobei $N(u) = |u|^{p-1}u$.

Das Paar (r,q) ist admissible: Wir haben $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{n(p+1)} \leq \frac{1}{2}$ (da $\frac{2}{p+1} < 1$). Also ergeben die Strichartz-Abschätzungen

$$\|\Lambda_{u_0} u - \Lambda_{v_0} v\|_{L^r_T(H^s_q)} \lesssim \overset{\text{für subkritisch}}{\|u_0 - v_0\|_{s,2}} + \|N(u) - N(v)\|_{L^{r'}_T(H^s_{q'})}$$

$$\|e^{it\Delta}(u_0 - v_0)\|_{L^r_T(H^s_q)} \leftarrow \text{für kritisch.}$$

Der erste Beitrag ist in Ordnung, um den zweiten weiter abzuschätzen, so die "fractional Leibniz rule" auf die innere Norm angewendet werden. Dazu ignorieren wir die Zeitabhängigkeit und untersuchen also

$$\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \|_{s,q'} .$$

Wir schreiben $\tilde{u}$ für u oder $\bar{u}$, so dass $|u|^{p-1}u = \tilde{u}^p$, genauso für v, so dass (geometrische Summenformel!)

$$|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v = \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{u}^{p-1-k}(\tilde{u}-\tilde{v})\tilde{v}^k$$

und $\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \|_{s,q'} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \| \tilde{u}^{p-1-k}(\tilde{u}-\tilde{v})\tilde{v}^k\|_{s,q'}$

Wiederholte Anwendung von "fractional Leibniz" auf einen beliebigen Summanden ergibt

$$\| \tilde{u}^{p-1-k}(\tilde{u}-\tilde{v})\tilde{v}^k\|_{s,q'} \lesssim \|u\|_{s,q} \|u\|_{q_1}^{p-2-k} \|u-v\|_{q_1} \|v\|_{q_1}^k + \dots$$

$$+ \|u\|_{q_1}^{p-1-k} \|u-v\|_{s,q} \|v\|_{q_1}^k + \|u\|_{q_1}^{p-1-k}\|u-v\|_{q_1} \|v\|_{s,q} \|v\|_{q_1}^{k-1},$$

sofern $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{p-1}{q_1} \iff 1 - \frac{2}{q} = \frac{p-1}{q_1} \iff \boxed{\frac{q-2}{q(p-1)} = \frac{1}{q_1} \quad \text{Bed. } 1}$

Eine Sobolev-Einbettung $H_q^s \subset L^{q_1}$ gilt unter der Voraussetzung $\frac{s}{n} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{q_1}$. Das können wir mit Bed. 1 gleich weiterverarbeiten und den Parameter q_1 eliminieren:

$$\frac{s}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q}\,\frac{q-2}{p-1} = \frac{1}{q}\,\frac{p+1-q}{p-1} \iff \boxed{\frac{s}{n} = \frac{p+1}{q(p-1)} - \frac{1}{p-1} \quad \text{Bed. } 2}$$

Nun haben wir $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{n(p+1)}$ vorausgesetzt, daraus folgt

$$\text{rechte Seite} = \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p-1} - \frac{2}{n(p-1)} - \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{n(p-1)} = \frac{s_c}{n}.$$

Da wir im kritischen Fall sind, ist Bed. 2 also erfüllt, und wir können abschätzen

$$\| \tilde{u}^{p-1-k}(\tilde{u}-\tilde{v})\tilde{v}^k\|_{s,q'} \lesssim \|u\|_{s,q}^{p-1-k} \|v\|_{s,q}^k \|u-v\|_{s,q}$$

$$\lesssim \left(\|u\|_{s,q} + \|v\|_{s,q}\right)^{p-1} \cdot \|u-v\|_{s,q},$$

was unabhängig von k und damit eine obere Schranke

für $\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \|_{s,q'}$ ist.

Einsetzen ergibt

$$\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \|_{L_T^{r'}(H_{q'}^s)} \lesssim \| (\|u\|_{s,q} + \|v\|_{s,q})^{p-1} \|u-v\|_{s,q} \|_{L_T^{r'}}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\lesssim} \left(\|u\|_{L_T^{r'p}(H_q^s)} + \|v\|_{L_T^{r'p}(H_q^s)} \right)^{p-1} \|u-v\|_{L_T^{r'p}(H_q^s)},$$

wobei $\frac{1}{pr'} = \frac{1}{p}(1-\frac{1}{r}) = \frac{1}{p} \cdot \frac{r-1}{r} \overset{r=p+1}{=} \frac{1}{r}$ ist, also

genau die passende Norm. Speziell haben wir:

(i) für $v_0 = 0$ und $v = 0$ und $u \in B_{R,T}$

$\left(\| \Lambda_{u_0} u \|_{L_T^r(H_q^s)} \leq C \|u_0\|_{s,2} + C \cdot R^p \right.$ für den subkritischen Fall $\left. \right)$

$$\| \Lambda_{u_0} u \|_{L_T^r(H_q^s)} \leq \| e^{it\Delta} u_0 \|_{L_T^r(H_q^s)} + C R^p$$

(ii) für $v_0 = u_0$ und $u, v \in B_{R,T}$

$$\| \Lambda_{u_0} u - \Lambda_{u_0} v \|_{L_T^r(H_q^s)} \leq C R^{p-1} \|u-v\|_{L_T^r(H_q^s)}.$$

Jetzt $C \cdot R^{p-1} = \frac{1}{2}$, also $R = (\frac{1}{2C})^{\frac{1}{p-1}}$ und anschließend

T so klein, dass $\| e^{it\Delta} u_0 \|_{L_T^r(H_q^s)} \leq \frac{R}{2}$.

Damit ist $\Lambda_{u_0} : B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion und

der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine Lösung der

Integralgleichung. $u \in C([-T,T], H^s)$ und Eindeutigkeit folgen jetzt mit bekannten Argumenten. Die Abschätzung oben mit $v_0 \neq u_0$ ist hinreichend allgemein, um auch die Stetigkeit des Lösungsoperators zu zeigen. □