

Betrachten wir wieder das Cauchy-Problem

$$i u_t + \Delta u = \pm |u|^{p-1} u, \quad u(t=0) = u_0, \quad (\text{NLS})$$

jetzt mit $u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^d)$, bzw. die entsprechende Integralgleichung

$$u(t) = \Lambda u(t) := e^{it\Delta} u_0 \mp i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds,$$

zu deren Lösung wir einen Fixpunkt der Abbildung Λ suchen.

Zur Verfügung stehen uns nun die Strichartz-Abschätzungen

$$(1) \quad \| e^{it\Delta} u_0 \|_{L_t^r(L_x^q)} \lesssim \| u_0 \|_{L_x^2} \quad (T)$$

$$(2) \quad \left\| \int_I e^{-is\Delta} f(s) ds \right\|_{L_x^2} \lesssim \| f \|_{L_t^{r'}(L_x^{q'})} \quad (T^*)$$

$$(3) \quad \left\| \int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L_t^r(L_x^q)} \lesssim \| f \|_{L_t^{r'}(L_x^{q'})} \quad (TT^*),$$

sofern (r, q) ein zulässiges Paar ist, d.h. wenn die Bedingungen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{r} = \frac{4}{2} - \frac{4}{q} \quad \begin{array}{c} \text{Vorüberlegung /} \\ \text{Herleitung} \end{array}$$

erfüllt sind. Wir müssen uns überlegen, wie die Hölder-Exponenten r und q zu wählen sind, damit (1)-(3) zur Durchführung eines kontraktiven Arguments genutzt werden können. Dazu sei (zunächst für lokale Lsgn. auf $[-T, T]$)

$$\mathcal{B}_{R,T} := \left\{ f \in L_t^r([-T, T], L_x^q) : \| f \|_{L_t^r(L_x^q)} \leq R \right\}$$

mit der natürlichen Metrik ausgestattet und damit vollständig. R, T, r, q to be chosen later und $L_t^r(L_x^q)$ als Abkürzung für $L_t^r([-T, T], L_x^q(\mathbb{R}^d))$. Versuchen wir zu

erreichen, dass $\Lambda : \mathcal{B}_{R,T} \rightarrow \mathcal{B}_{R,T}$ abbildet;

$$\| \Lambda u \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq \underbrace{\| e^{it\Delta} u_0 \|_{L_T^r(L_x^q)}}_{=: I} + \underbrace{\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^{p-1} u ds \|_{L_T^r(L_x^q)}}_{=: II}$$

wobei für jedes zulässige Paar (r, q) nach (T) gilt

$$I \lesssim \| u_0 \|_2$$

und nach (TT*)

$$\begin{aligned} II &\lesssim \| |u|^{p-1} u \|_{L_T^{r'}(L_x^{q'})} = \| |u|^p \|_{L_T^{r'}(L_x^{q'})} \\ &= \| u \|_{L_T^{r'p}(L_x^{q'p})}^p \stackrel{!}{\lesssim} C_T \| u \|_{L_T^r(L_x^q)}^p \end{aligned}$$

(!) ist natürlich erforderlich, um den Kreis der Abschätzungen für ein Kontraktionsargument zu schließen. In der Zeitvariable haben wir etwas Spielraum - wir können die Hölder'sche Ungleichung mit $q=1$ als zweitem Faktor benutzen, um einen kontrahierenden Faktor T^ε zu gewinnen. Aber die Raumvariable x sind wir festgelegt: Das angebotene Argument erfordert

$$q' \cdot p = q \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{p+1}{q} = 1, \text{ d.h. } \boxed{q = p+1},$$

und weiter - da wir für unseren Versuch eine "admissible pair" benötigen -

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} = \frac{1(p-1)}{2(p+1)}, \text{ also } \boxed{\frac{1}{r} = \frac{1(p-1)}{4(p+1)}} \text{ oder } r = \frac{4(p+1)}{1(p-1)}$$

Dannst können wir weiterrechnen: Wir haben

$$\| \Psi \|_{L_T^{r,p}} \leq (2T)^\varepsilon \cdot \| \Psi \|_{L_T^r} \quad \text{für} \quad \frac{1}{r^p} = \varepsilon + \frac{1}{r}, \quad (148)$$

d.h. für $\varepsilon = \frac{1}{r^p} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p+1}{r}\right) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{4(p-1)}{4}\right),$

und letzteres ist positiv $\Leftrightarrow 1 > \frac{4(p-1)}{4} \Leftrightarrow \boxed{p-1 < \frac{4}{4}},$

und das ist genau der subkritische Bereich, für den

$0 > s_c = \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1}$ ist. Unter dieser Voraussetzung

$$1 < p < \frac{4}{4} + 1$$

können wir also unsere Rechnung zu Ende bringen, und mit $\delta := p \cdot \varepsilon = 1 - \frac{4(p-1)}{4}$ erhalten wir (r, q) -Werten!

$$\| \Lambda u \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq c \| u_0 \|_{L_x^2} + c T^\delta \| u \|_{L_T^r(L_x^q)}^p \quad (*)$$

Ganz ähnlich die Differenzabschätzung, die wir zum Nachweis der Kontraktivität benötigen:

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq \| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \|_{L_T^r(L_x^q)}$$

Nun müssen wir punktweise abschätzen. Dazu beachten wir, dass die Abbildung $z \mapsto |z|^{p-1}z = (|z|^2)^{\frac{p-1}{2}} \cdot z =: \Psi(z, \bar{z})$ wegen $p > 1$ stetig differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(z, \bar{z}) = \frac{p-1}{2} (|z|^2)^{\frac{p-1}{2}-1} \cdot |z|^2 + (|z|^2)^{\frac{p-1}{2}} = \frac{p+1}{2} |z|^{p-1}$$

und

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = \frac{p-1}{2} (|z|^2)^{\frac{p-1}{2}-1} \cdot z^2 = \frac{p-1}{2} |z|^{p-3} \cdot z^2.$$

Die Mittelwertungleichung liefert uns also "punktweise"

$$| \|u\|^{p-1}u - \|v\|^{p-1}v | \lesssim (\|u\|^{p-1} + \|v\|^{p-1}) |u-v| ,$$

und mit derselben Wahl der Hölderexponenten wie oben können wir zu

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq C T^\delta \left(\|u\|_{L_T^r(L_x^q)}^{p-1} + \|v\|_{L_T^r(L_x^q)}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L_T^r(L_x^q)} \quad (**)$$

und es ist absehbar, dass mit (*) und (**) eine Kontraktionseigenschaft durchführbar ist. Ende der Vorüberlegung.

Satz 1 (subkritischer Fall): Es seien $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \frac{d}{d-2} + 1$

und $q = p+1$ sowie $T = \frac{4(p+1)}{c(p-1)}$.

Dann existiert eine $T = T(\|u_0\|_2) > 0$ und eine Lösung

$$u \in C([0, T], L_x^2) \cap L_T^r(L_x^q)$$

von (NLS) mit $u(t=0) = u_0$. Diese ist eindeutig in $L_T^r(L_x^q)$.

Bew.: (i) Für $u, v \in B_{R,T}$ ergeben die Abschätzungen (*) und (**) sowie

$$\| \Lambda u \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq c \|u_0\|_2 + C T^\delta \cdot R^p \quad \text{so wie}$$

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_{L_T^r(L_x^q)} \leq C T^\delta R^{p-1} \|u-v\|_{L_T^r(L_x^q)} ,$$

wobei wir annehmen können, dass überall dieselbe Konstante c steht. Wir wählen

$$c \|u_0\|_2 = \frac{R}{2} ,$$

also

$$\boxed{R := 2c \|u_0\|_2} \quad \boxed{T := \left(\frac{R^{1-p}}{2c} \right)^{\frac{1}{\delta}}}$$

und $T > 0$ so, dass $C T^\delta R^{p-1} = \frac{1}{2}$, d. h.

Dann sind $\|\Lambda u\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq R$ und $\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)}$

also $\Lambda : \mathcal{B}_{R,T} \rightarrow \mathcal{B}_{R,T}$ eine Kontraktion, und der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine Lösung $u \in L_T^r(L_x^q)$ von NLS, die in $\mathcal{B}_{R,T}$ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Wir zeigen: $u \in C([-T, T], L_x^2)$: Dazu sei $u \in L_T^r(L_x^q)$

$$\text{wert } u(t) = e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds.$$

Dabei ist das erste Summand eine stetige Funktion mit Werten in L_x^2 , da $u_0 \in L_x^2$ u.v. und $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ eine unitäre (und damit stark stetige) Gruppe auf L_x^2 ist.

Bleibt die Stetigkeit des Duhamel-Terms

$$t \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds =: D_u(t)$$

als Funktionen von $t \in [-T, T]$ nach L_x^2 einzusehen: mit (T^*)

erhalten wir

$$\begin{aligned} \|D_u(t+h) - D_u(t)\|_{L_x^2} &= \left\| \int_t^{t+h} e^{i(t+h-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds \right\|_{L_x^2} \\ &= \left\| \int_t^{t+h} e^{-is\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds \right\|_{L_x^2} \stackrel{(T^*)}{\lesssim} \| |u|^{p-1} u \|_{L_t^{r'}([t, t+h], L_x^{q'})} \end{aligned}$$

obige Abschätzung $\lesssim |h|^\delta \|u\|_{L_t^r([t, t+h], L_x^q)}^p \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$

(iii) Eindeutigkeit in $L_T^r(L_x^q)$: $u, v \in L_T^r(L_x^q)$ Lösungen mit $u(t=0) = v(t=0) = u_0$. Dann sind nach (ii) $u, v \in C([-T, T], L_x^2)$

und $T_* := \inf \{t > 0 : u(t) \neq v(t)\}$ ist wohldefiniert.

Es gilt $u(T_*) = v(T_*) \in L_x^2$ und das Fixpunktargument kann

wert dieses (kleinen) Anfangswert wiederholt werden. Für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und $t \in [0, \delta]$ liegen $u(T_* + t)$ und $v(T_* + t)$ dann in einer Kugel $B_{R, \delta} \subset L_T^r(L_x^q)$ wo unsere Eindeutigkeit hat. Widerspruch zur Wahl von T_* . \square

Folgerungen aus dem Beweis:

(i) Wir haben im Bew. $R := 2C \|u_0\|_{L_x^2}$ gewählt. Ist nun $v_0 \in L_x^2$ mit $\|v_0\|_{L_x^2} \leq \|u_0\|_{L_x^2} = \frac{R}{2C}$ mit zugehöriger Lösung v , so zeigen unsere Abschätzungen (*) und (**)

$$\|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq C \|u_0 - v_0\|_{L_x^2} + \frac{1}{2} \|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)}$$

also $\|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq 2C \|u_0 - v_0\|_{L_x^2}$ (***)

Ferner haben wir im Schritt (ii) des Beweises gesehen, dass

$$\|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L_x^2} + \frac{\tilde{C} T \delta R^{p-1}}{\tilde{C}} \|u - v\|_{L_T^r(L_x^q)}$$

(Abschätzung (T*)) $\lesssim \|u_0 - v_0\|_{L_x^2}$ (***)

Damit ist der Lösungsoperator $u_0 \mapsto u, L_x^2 \supset \overline{B_{\frac{R}{2C}}(0)} \rightarrow \dots$
 $\subset C([T, T], L_x^2) \cap L_T^r(L_x^q)$ Lipschitz-stetig.

Unsere Argumente ergeben also ein lokales Wohlgestelltheitsresultat im vollen Umfang - wenn auch "conditio-nal", auf dem Durchbruch mit $L_T^r(L_x^q)$ können wir bei der Eindeutigkeit nicht verzichten.

(ii) Wir wählen $T = \left(\frac{R^{1-p}}{2c}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ mit $\delta = 1 - \frac{4(p-1)}{4}$ gewählt und (152)

$R = 2c \|u_0\|_2$, was $T = T(\|u_0\|_2) = \tilde{c} \|u_0\|_2^{\frac{1-p}{\delta}}$ als weitere Schranke für die Lebensdauer ergibt. Die Erhaltung der L_x^2 -Norm erlaubt also die Fortsetzung der lokalen Lösung u aus Satz 1 zu einer globalen, eindeutigen Lösung

$$\tilde{u} \in C(\mathbb{R}, L_x^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}, L_x^2) \cap L_{t,loc}^r(\mathbb{R}, L_x^q)$$

Insoweit ist das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0 \in L_x^2$ für die (NLS) im subkritischen Fall $1 < p < \frac{4}{d} + 1$ global wohlgestellt.

Im kritischen Fall $p = \frac{4}{d} + 1$ müssen wir unser Argument modifizieren. Der Schluß in Folgerung (ii) wird auch gar nicht mehr möglich sein, wie das Beispiel einer "blow-up"-Lösung in Aufg. 20 zeigt. Was wir erreichen können ist der folgende

Satz 2 (kritischer Fall): Es sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $p = \frac{4}{d} + 1$, dann existiert ein $T = T(u_0) > 0$ und eine Lösung

$$u \in C([-T, T], L_x^2) \cap L_{Tx}^r \quad (r = p + 1)$$

mit $u(t=0) = u_0$ von (NLS). Diese ist eindeutig in L_{Tx}^r .

Bew.: Zunächst stellen wir fest, dass (r, q) mit $r = q = p + 1$

im kritischen Fall $p = \frac{4}{d} + 1$, d.h. $r = q = \frac{4}{d} + 2$, ein "admissible pair" für die Strichartz-Abschätzungen ist. Das bedeutet,

dass $u_1 \in L_{tx}^r$ (global!) für $u_1(x, t) = e^{it\Delta} u_0(x)$.

Da $r < \infty$ ist, gilt also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $T = T(\varepsilon, u_0)$,

so dass $\|u_1\|_{L_{Tx}^r} \leq \varepsilon$ ist. Für ein solches $T = T(\varepsilon, u_0)$

Sei nun

$$B_{R,T} := \{u \in L^r_{Tx} : \|u\|_{L^r_{Tx}} \leq R\},$$

R und ε werden in wenigen Zeilen gewählt. Dann schätzen wir ab:

$$\|\Lambda u\|_{L^r_{Tx}} \leq \varepsilon + c \| |u|^{p-1} u \|_{L^r_{Tx}} \quad (TT^*)$$

$$\text{r). } p=r \quad = \quad \varepsilon + c \cdot \|u\|_{L^r_{Tx}}^p \leq \varepsilon + cR^p$$

und

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^r_{Tx}} \leq c (\|u\|_{L^r_{Tx}}^{p-1} + \|v\|_{L^r_{Tx}}^{p-1}) \|u-v\|_{L^r_{Tx}} \leq cR^{p-1} \|u-v\|_{L^r_{Tx}}$$

Merke ist die (am Ende in beiden Abschätzungen identische) Konstante c unabhängig von T . Wir wählen

$$R := (2c)^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{R}{2}, \quad \text{so dass für } T = T(\frac{R}{2}, u_0) > 0$$

$$\|\Lambda u\|_{L^r_{Tx}} \leq R \quad \text{und} \quad \|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^r_{Tx}} \leq \frac{1}{2} \|u-v\|_{L^r_{Tx}}$$

also mit dieser Festlegung $\Lambda : B_{R,T} \rightarrow B_{R,T}$ eine Kontraktion ist. Zum Beweis der Stetigkeit der Lösung benutzt man wieder die Abschätzung (T^*) , wobei das Argument genauso zu modifizieren ist, wie zu Beginn dieses Beweises:

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) ds \right\|_{L^r_x} &\lesssim \| |u|^{p-1} u \|_{L^r_t([t, t+h], L^r_x)} \\ &= \|u\|_{L^r_t([t, t+h], L^r_x)}^p \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

da $u \in L^r_{Tx}$. Eindeutigkeit folgt genauso. □

Frage: Die Fredholmmergen des Datenraumes $L^2(\mathbb{R}^n)$, zu obere

(153)

Elemente es Lösungsgesam gleicher Lebensdauer $T > 0$, sind eine kritische Fall nicht mehr Kugeln bezüglich der Normen (mit verschiedenen Radien), sondern die Menge

$$\{u_0 \in L^2_x(\mathbb{R}^n) : \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_{T,x}} \leq R\}, \quad R > 0.$$

Auf dieser Menge kann man jetzt ähnlich wie oben wieder die Lipschitz-Stetigkeit des Lösungsopeators $u_0 \mapsto u$ zeigen.

Nach der Nichtspatze zurück ist eine kurze Erinnerung:

Nach wie vor betrachten wir das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0$ für die semilineare Schrödinger-Gleichung

$$i u_t + \Delta u = \pm |u|^{p-1} u \quad (\text{NLS})$$

bzw. die entsprechende Integralgleichung $u(t) = \Lambda u(t)$ mit

$$\Lambda u(t) = e^{it\Delta} u_0 \mp i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} |u(t')|^{p-1} u(t') dt'$$

Ein wesentliches Hilfsmittel zu dieser Untersuchung sind die Strichartz-Abschätzungen

$$(T) \quad \| e^{it\Delta} u_0 \|_{L_t^r(L_x^q)} \lesssim \| u_0 \|_2, \quad (T^*) \quad \left\| \int_I e^{-it'\Delta} f(t') dt' \right\|_2 \lesssim \| f \|_{L_t^{r'}(L_x^{q'})}$$

$$(TT^*), \text{ wobei } \left\| \int_I e^{i(t-t')\Delta} f(t') dt' \right\|_{L_t^r(L_x^q)} \lesssim \| f \|_{L_t^{r'}(L_x^{q'})}$$

Damit haben wir für Daten in $L^2(\mathbb{R}^d)$ folgende Ergebnisse zeigen können:

- (1) LWP (und mit der Erhaltung von $\|u(t)\|_2$ auch GWP) im subkritischen Bereich $1 < p < \frac{4}{d}$ (wobei auch die Regularität $s=0$ fixiert);
- (2) LWP im kritischen Fall $p = \frac{4}{d}$. Die Kontrolle der Lebensdauer T durch die Norm der Daten geht hier allerdings verloren, weil die Scaling-Metrik versagt löst. Der Schluss auf GWP mit Hilfe der L^2 -Normenerhaltung wird falsch, weil ein solches Gegenbeispiel distinktes Bsp. ($u=1$, A. 20) belegt.

Bisher haben wir den globalen Charakter des Strichartz-Ab-
schätzungslemmas noch nicht ausgenutzt. Dieser kann verwendet
werden, um im kritischen Fall GWP bei kleinen Daten
zu zeigen, das bedeutet (vorläufige algebraische Formulierung)

Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $u_0 \in X$ mit $\|u_0\|_X \leq \varepsilon_0$
genau eine Lösung $u \in C(\mathbb{R}, X) \cap \dots$ existiert. Diese
hängt stetig von den Daten ab.

Der Beweis dieser Aussage für NLS mit $p = 1 + \frac{4}{d}$ und
Daten in L^2 ist nach den bisher Besprochenen nicht
mehr schwierig: Anstelle der Kleinheit des Zeitinter-
valls benutzt man die Kleinheit der Daten, um die
Voraussetzungen des Banach'schen FPS zu gewährleisten.
(Einzelheiten später.)

Mit denselben Abschätzungen, die zum Beweis dieser
Aussage (GWP bei kleinen Daten) erforderlich sind, kann
man häufig auch Aussagen über das asymptotische
Verhalten der globalen Lösungen für $t \rightarrow \pm \infty$ zeigen,
in der Regel nämlich, dass sie sich annähernd wie
Lösungen der homogenen linearen Gleichung verhalten,
allerdings mit anderen Daten. Dieses Phänomen
nennt man Streuung, es erinnert an die Kometen-
bewegung oder profaner an Billiard. Also zunächst
einige Grundbegriffe der Streutheorie (engl. scattering
theory):

Allgemeine Situation: Gegeben seien ein Datenraum X und eine

globale Lösung $u \in (C(\mathbb{R}, X) \cap L_t^\infty(X))$

einer nichtlinearen Wellengleichung

$$u_t - i\varphi(-i\Delta)u = N(u) \tag{NLE}$$

mit Anfangswert $u_0 \in X$. $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sei der lineare Propagator.

Def. 1 (Streuzustände): Wenn der Grenzwert

$$u_+ := \lim_{t \rightarrow \infty} U_\varphi(-t)u(t) \text{ (Konvergenz im Normen auf } X \text{)}$$

existiert, so heißt u_+ der Streuzustand (von u) bei $+\infty$. Ent-

sprechend heißt $u_- := \lim_{t \rightarrow -\infty} U_\varphi(-t)u(t)$ der Streuzustand

von u bei $-\infty$.

Bem. 1 (i) Bezgl.: Scattering state at $\pm\infty$.

(ii) Üblicherweise ist X ein Hilbertraum (z.B. $X = H^s$ oder $X = \dot{H}^s$)

und $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe auf X . Das Konzept macht auch Sinn, wenn X lediglich ein Banachraum ist

(z.B. $X = B_{2,q}^s$ oder $X = \dot{B}_{2,q}^s$ mit $q \neq 2$) und $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von Isometrien.

(iii) Unter den in (ii) genannten Voraussetzungen ist die definierte Eigenschaft äquivalent zu

$$0 = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u_\pm - U_\varphi(-t)u(t)\|_X = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_\varphi(t)u_\pm - u(t)\|_X,$$

d.h.: die Lösung u des nichtlinearen Problems verhält

asymptotisch (genauer: im Grenzwert $t \rightarrow \pm\infty$) wie eine Lösung der homogenen linearen Gleichung mit Anfangswerten u_+ bzw. u_- . (15)

(iv) stationäre (= zeitunabhängige) Lösungen der hom. Gleichung sind in Def. 1 durchaus zugelassen, diese können sogar attraktiv sein (d.h. sie können Grenzzustand für eine Vielzahl von Lösungen u sein). Das ist jedoch nicht das, was man eigentlich unter Streuung versteht.

Man definiert ferner die Mengen

$R_{\pm} := \{u_0 \in X : \text{Es ex. eine eindeutige globale Lösung } u \text{ von (NLE) mit } u(t=0) = u_0 \text{ und der Grenzwert } u_{\pm} \text{ von } u \text{ bei } \pm\infty \text{ existiert}\}$

und die Operatoren (Abbildungen)

$$U_{\pm} : X \supset R_{\pm} \longrightarrow X, \quad u_0 \longmapsto U_{\pm}(u_0) := u_{\pm}$$

Def. 2 (Wellenoperatoren und Streuoperator): Sind die Operatoren U_{\pm} invertierbar, so heißen ihre Umversen

$$W_{\pm} := U_{\pm}^{-1} : U_{\pm}(R_{\pm}) \longrightarrow R_{\pm}, \quad u_{\pm} \longmapsto W_{\pm}(u_{\pm}) := u_0$$

die Wellenoperatoren für die Gleichung (NLE).

Schließlich setzt man $\Omega_{\pm} := U_{\pm}(R_{+} \cap R_{-})$ und nennt

$$S : \Omega_{-} \longrightarrow \Omega_{+}, \quad u_{-} \longmapsto S(u_{-}) = U_{+}(W_{-}(u_{-})) = u_{+}$$

den Streuoperator.

Lemma: (i) Δ (wave operators) und scattering operator.

(ii) Die Existenz der Wellenoperatoren schließt also einen σ -Kontinuitätszustand aus.

(iii) Es seien $u_{\pm} \in X$. Dann ist $u_{\pm} = S u_0$ genau dann, wenn ein eindeutig bestimmtes $u_0 \in X$ mit globaler Lösung $u \in C(\mathbb{R}, X) \cap L^{\infty}_t(\mathbb{R}, X)$ existiert, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} U_{\mp}(t) u(t) = u_{\pm} \text{ ist.}$$

Für die semilineare Schrödinger-Gleichung mit L^2 -Kontinuitätswellen Exponenten $p = 1 + \frac{4}{d}$ können wir die Existenz des Streuoperators in einer ε -Kugel um den Nullpunkt in $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit Hilfe der Strichartz-Abschätzungen beweisen ("nonlinear small data scattering"). Gewauer:

Satz 3: Es seien $d \geq 1$, $p = 1 + \frac{4}{d}$ und $r = p + 1$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $u_0 \in B_{\varepsilon_0}(0) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:

(i) Es existiert eine eindeutige Lösung

$$u \in C(\mathbb{R}, L^2_x) \cap L^{\infty}_t(\mathbb{R}, L^2_x) \cap L^{r}_{xt}$$

von (NLS) mit $u(t=0) = u_0$. Diese hängt stetig von u_0 ab.

(ii) Für jedes solche u existieren die Grenzzustände

$$u_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} e^{-it\Delta} u(t) \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ und die Abbildungen}$$

$$u_{\pm} : L^2_x \supset B_{\varepsilon_0}(0) \rightarrow L^2_x \text{ sind invertierbar.}$$

p.t.o. →

(iii) Die Wellenoperatoren $W_{\pm} : U_{\pm}(B_{\varepsilon_0}(0)) \rightarrow B_{\varepsilon_0}(0)$ (158)

sind stetig und es existieren offene Nullumgebungen

$B_{\pm} := U_{\pm}(B_{\varepsilon_0}(0))$, so dass der Streuoperator $S : B_{-} \rightarrow B_{+}$

$u_{-} \mapsto S(u_{-}) = u_{+}$ stetig ist.

Bew. Wir setzen für $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und $u, v \in L^r_{xt}$

$$\Lambda_{u_0} u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} (u(t') | P^{-1} u(t')) dt' \\ =: N(u(t'))$$

und

$$\Lambda_{v_0} v(t) = e^{it\Delta} v_0 - i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} N(v(t')) dt'$$

C_{Str} sei die Konstante in den Strichartz-Abschätzungen (T) und

(T^{*}). Die Anwendung von (T) und (T^{*}) ergibt

$$\| \Lambda_{u_0} u - \Lambda_{v_0} v \|_{L^r_{xt}} \leq C_{\text{Str}} \|u_0 - v_0\|_2 + C_{\text{Str}}^2 \| |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \|_{L^r_{xt}} \\ \leq C_{\text{Str}} \|u_0 - v_0\|_2 + C_{\text{Str}}^2 \cdot C_p \left(\|u\|_{L^r_{xt}}^{p-1} + \|v\|_{L^r_{xt}}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r_{xt}}$$

Speziell für $v_0 = v = 0$:

$$\| \Lambda_{u_0} u \|_{L^r_{xt}} \leq C_{\text{Str}} \|u_0\|_2 + C_{\text{Str}}^2 C_p \|u\|_{L^r_{xt}}^p$$

und für $u_0 = v_0$

$$\| \Lambda_{u_0} u - \Lambda_{u_0} v \|_{L^r_{xt}} \leq C_{\text{Str}}^2 C_p \left(\|u\|_{L^r_{xt}}^{p-1} + \|v\|_{L^r_{xt}}^{p-1} \right) \|u - v\|_{L^r_{xt}}$$

sind darüber hinaus $u, v \in B_R(0) \subset L^r_{xt}$ und $u_0 \in B_{\varepsilon_0}(0) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$,

so erhalten wir

$$\| \Lambda_{u_0} u \|_{L_{xt}^r} \leq C_{str.} \varepsilon_0 + C_{str.}^2 \cdot C_p R^p \quad \text{und}$$

$$\| \Lambda_{u_0} u - \Lambda_{u_0} v \|_{L_{xt}^r} \leq 2 C_p C_{str.}^2 \cdot R^{p-1} \| u - v \|_{L_{xt}^r}.$$

Im Hinblick auf die Aussagen zur Streutheorie wählen wir (etwas schärfere als bisher):

$$2 C_p \cdot C_{str.}^2 \cdot R^{p-1} = \frac{1}{4} \quad (\Leftrightarrow R^{p-1} = \frac{1}{8 C_p C_{str.}^2})$$

und $C_{str.} \cdot \varepsilon_0 = \frac{R}{2}$ ($\Leftrightarrow \varepsilon_0 = \frac{R}{2 C_{str.}}$ Genaues wissen wir das nicht aufzulösen!)

Dann ist $\Lambda_{u_0} : B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ eine Kontraktion und wir erhalten eine Lösung $u \in L_{xt}^r$ der Integralgleichung $\Lambda_{u_0} u = u$, die in $B_R(0)$ eindeutig ist. Hierfür haben wir aufgrund der Abschätzung

$$(T^*) \quad \left\| \int_I e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt' \right\|_2 \leq C_{str.} \| u \|_{L_t^r(I, L_x^r)}^p,$$

wobei I ein beliebiges, möglicherweise t -abhängiges Intervall ist.

Für $I = [0, t]$: $u \in L_t^\infty(L_x^2)$.

Für $I = [t, t+h]$: $u \in C(\mathbb{R}, L_x^2)$, hieran kann man (weil bereits früher gesehen) den Beweis der Eindeutigkeit in L_{xt}^r abschließen, ebenso wie dass die stetige Abl. der Lösung von den Daten, ebenfalls hier nicht wiederholt werden.

Existenz der Streuzustände \Downarrow

Für $I = [t, \infty)$ erhalten wir

$$\left\| \int_t^\infty e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt' \right\|_2 \leq C_{str.} \| u \|_{L_t^r([t, \infty), L_x^r)}^p \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

und das bedeutet

$$L^2(\mathbb{R}^n) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt' = 0$$

und damit die Existenz von

$$L^2(\mathbb{R}^n) - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-it\Delta} u(t) = u_+ \mp i L^2(\mathbb{R}^n) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt'$$

$$= u_+ \mp i \int_0^\infty e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt' = u_+$$

und entsprechend gilt man die Existenz des $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Grenzwerts

$$u_0 \mp i \int_0^{-\infty} e^{-it'\Delta} N(u(t')) dt' = u_-$$

Also ist die Existenz der Streuzustände gezeigt.

Nun soll die Injektivität und Offenheit von $U_+ : L^2(\mathbb{R}^n) \supset B_{\epsilon_0}(0) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$u_0 \mapsto U_+(u_0) = u_+$ bewiesen werden. Dazu seien $u_0, v_0 \in B_{\epsilon_0}(0)$ zwei Lösungen $u = \Lambda_{u_0} u$ und $v = \Lambda_{v_0} v$. Dann gilt nach Friedrichs (s.o.) und aufgrund unserer Wahl von R :

$$\|u - v\|_{L_{xt}} \leq C_{\text{Str.}} \|u_0 - v_0\|_2 + \underbrace{2C_P C_{\text{Str.}}^2 R^{p-1}}_{= \frac{1}{4}} \|u - v\|_{L_{xt}}$$

$$\Rightarrow \|u - v\|_{L_{xt}} \leq \frac{4}{3} C_{\text{Str.}} \|u_0 - v_0\|_2 \quad (*)$$

Somit gilt $u_+ = U_+(u_0)$ und $v_+ = U_+(v_0)$ die jeweiligen Streuzustände bei $+\infty$, so gilt

$$u_+ - v_+ = u_0 - v_0 \mp i \int_0^\infty e^{-it'\Delta} (N(u(t')) - N(v(t'))) dt' \quad (**)$$

und daraus folgt

$$\|u_0 - v_0\|_2 \leq \|u_+ - v_+\|_2 + \left\| \int_0^\infty e^{-it'\Delta} (N(u(t')) - N(v(t'))) dt' \right\|_2$$

Strichsatz (T*)

$$\leq \|u_+ - u_-\|_2 + 2C_p C_{str.} R^{p-1} \|u - v\|_{L^{\infty}_x}$$

$$\leq \|u_+ - u_-\|_2 + \underbrace{2C_p C_{str.} R^{p-1} C_{str.}}_{= \frac{1}{4}} \cdot \frac{4}{3} \|u_0 - v_0\|_2$$

(*)

$$= \frac{1}{3}$$

also: $\|u_0 - v_0\|_2 \leq \frac{3}{2} \|u_+ - v_+\|_2$

Aus $u_+ = v_+$ folgt also $u_0 = v_0$ (und wg. des Eindeut. $u=v$), das ist die Injektivität von U_+ . Ferner zeigt die Ungleichung, dass $W_+ : U_+(B_{\varepsilon_0}(0)) \rightarrow B_{\varepsilon_0}(0), u_+ \mapsto u_0$ (Lipschitz-) stetig ist, und das ist die Offenheit von U_+ . Insbesondere ist $U_+(B_{\varepsilon_0}(0))$ eine offene Nullumgebung in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ebenso sieht = B_+ man die Stetigkeit von W_- und die Offenheit von $B_- := U_-(B_{\varepsilon_0}(0)) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ eine.

Für die Stetigkeit des Streuoperators

$$S = U_+ \circ W_- : B_- \rightarrow B_+$$

fehlt jetzt nur noch die Stetigkeit von U_+ . Diese folgt aus

$$\|u_+ - v_+\|_2 \stackrel{(**)}{\leq} \|u_0 - v_0\|_2 + \left\| \int_0^{\infty} e^{-it\Delta} (N(u(t)) - N(v(t))) dt \right\|_2$$

$$\lesssim \|u_0 - v_0\|_2 \quad (\text{wie oben})$$

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen. □

An dieser Stelle kann man die Theorie noch etwas vertiefen und entsprechende Ergebnisse für Daten $u_0 \in \mathbb{R}_{2,q}^0$, $1 \leq q \leq \infty$, ableiten. Für $q = \infty$ treten gewisse Probleme auf, z.B. ist die eindeutige Lösung nur noch schwach stetig. (Planchon, F., 2000; zwei Arbeiten zu NLS/NLW, in beiden Daten in $\mathbb{R}_{2,q}^0$, $s \geq 0$) Aus Zeitgründen muß ich auf die Diskussion dieser Ergebnisse hier verzichten.

Was jedoch auch im subkritischen Fall möglich ist, ist die Verallgemeinerung der WP-Theorie auf Daten in $H^s(\mathbb{R}^4)$ für $s < 0$, obwohl das scaling-Argument diese Möglichkeit nahelegt. Tatsächlich hat man für $s < 0$ ill-posedness wie C^0 -Stetigkeit, das bedeutet,

Der Lösungsoperator

$$S: H^s \xrightarrow{\hat{B}} C([0, T], H^s), \quad u_0 \mapsto S(u_0) = u$$

(Daten auf Lösungen) ist auf Kugeln $B \subset H^s$ nicht gleich stetig.

(Dabei ist nicht gesagt, dass ein solcher Lösungsoperator ex.) Das (relativ) einfache Argument zum Beweis dieser Aussage wurde von Kenig, Ponce, und Vega im 2001 entwickelt und soll hier im speziellen Fall $n=1$ und $p=8$ (critic NLS in 1D) erläutert werden: Betrachtet wird also das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$

für die Gleichung $u_t + \Delta u + |u|^2 u = 0. \quad (*)$

Proposition 1: Es sei $S \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Wenn der Lösungsoperator (16)

$$S: H^S(\mathbb{R}) \supset \mathcal{B} \rightarrow ([-T, T], H^S(\mathbb{R})) \quad u_0 \mapsto S(u_0) = u$$

für das Problem (*) existiert, so ist S nicht gl., stetig.

Bew.: Sei $T > 0$ vorgegeben. Wir konstruieren ein Folgenpaar

$(u_N, v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ von Lösungen mit den folgenden ESEM:

(i) $\exists M > 0$, so dass $\|u_N(0)\|_{S,2} \leq M$ und $\|v_N(0)\|_{S,2} \leq M \quad \forall N \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N(0) - v_N(0)\|_{S,2} = 0$ und

(iii) $\exists \varepsilon_0 > 0$ so dass $\|u_N(T) - v_N(T)\|_{S,2} \geq \varepsilon_0 \quad \forall N \in \mathbb{N}, N \geq N_0$

Daraus folgt die Beh. für $\mathcal{B} = B_M(0)$. Durch scaling kann hierbei ein beliebig kleiner, positiver Kugelradius erzeugt werden. Wir beginnen mit

$$f(x) := \sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \quad \Rightarrow \quad f'' = f - f^3 = f - |f|^2 f \quad ;$$

$$f_\omega(x) := \omega f(\omega x) \quad \Rightarrow \quad f_\omega'' = \omega^2 f_\omega - f_\omega^3 \quad ;$$

$$u_{N,\omega}(x,t) := e^{-it(N^2 - \omega^2)} e^{iNx} f_\omega(x - 2tN) \quad \text{löst cubic (NLS)}$$

(Das haben wir (*) in den Übungen nachgerechnet, s. Problem 6 und

Aufg. 6. Der Übergang von der einparametrischen Lösungss-

char $(u_0, \omega)_{\omega > 0}$ zu der zweiparametrischen Schar $(u_{N,\omega})_{N,\omega > 0}$

~~ist~~ ist möglich aufgrund der Galileo-Invarianz

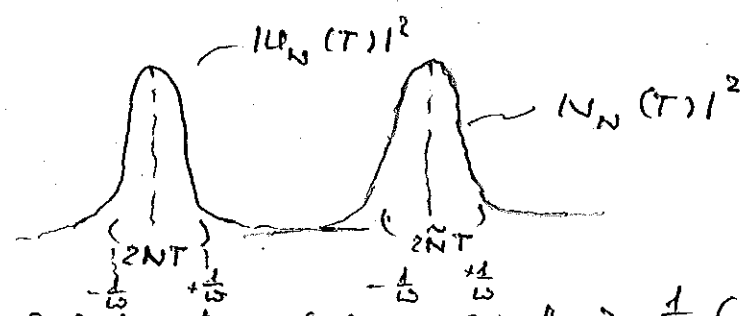
der NLS. Wobei kann man sagen, dass das nachfol-

* zumeist Teil jedesfalls

$$\|u_N(t) - v_N(t)\|_{S,2} = N^S \|u_N(t) - v_N(t)\|_2,$$

und (bis auf Phasefaktoren) ist $u_N(t) = \exp(i\omega t) f_\omega(x - 2Nt)$
 $= \exp(i\omega t) \omega f(\omega(x - 2Nt))$ und $v_N(t) = \exp(i\omega t) \omega f(\omega(x - 2\tilde{N}t))$.

d.h. $u_N(t)$ und $v_N(t)$ haben für hinreichend großes N
auf disjunkten Mengen konzentrierte L^2 -Dichten.



Daraus folgt $\|u_N(t) - v_N(t)\|_2 \geq \frac{1}{2} (\|u_N(t)\|_2 + \|v_N(t)\|_2) \geq \sqrt{\omega}$

also: $\|u_N(t) - v_N(t)\|_{S,2} \geq N^S \sqrt{\omega} \geq \epsilon_0$. Damit ist (ii) ge-
zeigt. Schließlich haben wir

$$\|u_N(t) - v_N(t)\|_{S,2}^2 \sim N^{2S} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}) - \hat{f}(\frac{\xi - N}{\omega})|^2 d\xi$$

$$= N^{2S} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\frac{\xi - N}{\omega}}^{\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}} \hat{f}'(\eta) d\eta \right|^2 d\xi$$

$$\leq N^{2S} \frac{|\tilde{N} - N|}{\omega} \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{\xi - N}{\omega}}^{\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}} |\hat{f}'(\eta)|^2 d\eta d\xi$$

$$\frac{\xi - N}{\omega} < \eta < \frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \eta\omega + \tilde{N} < \xi < \eta\omega + N$$

$$= N^{2S} \frac{|N - \tilde{N}|}{\omega} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(\eta)|^2 \cdot \left(\int_{\eta\omega + \tilde{N}}^{\eta\omega + N} d\xi \right) d\eta$$

$$= N^{2S} |N - \tilde{N}|^2 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(\eta)|^2 d\eta = CN^{4S} \cdot \frac{N^{2\epsilon}}{N^{4S}} = CN^{-2\epsilon} \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$$

und das ist Teil (ii) der Beh.. □

(*) nämlich: $B_{\frac{1}{\omega}}(2Nt)$ und $B_{\frac{1}{\omega}}(2\tilde{N}t)$

quide Ul-posedness - Argument auf der Galileo-Invarianz beruht. Ähnlich wie die scaling-Symmetrie die Bedingung $S \geq S_c = \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1}$ liefert, führt also die Galileo-Invarianz auf $S \geq 0$ als notwendige Bedingung für LWP.)

Wir fixieren zunächst nur den folgenden Zsh. zwischen ω und N : $\omega := \omega(N) = N^{-2s}$. Dann haben wir

$$\mathcal{F}_x u_{N,\omega}(\xi, t) = e^{-it(N^2 - \omega^2)} e^{2itN\xi} \frac{\widehat{f}_\omega(\xi - N)}{\widehat{f}(\frac{\xi - N}{\omega})}$$

d.h. $\mathcal{F}_x u_{N,\omega}(t)$ ist konzentriert in $B_\omega(N)$ und das unabhängig von t . Damit ergibt sich für die H^s -Norm

$$\begin{aligned} \|u_{N,\omega}(t)\|_{S,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f}(\frac{\xi - N}{\omega})|^2 d\xi && \omega \ll N \\ & && \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ &\sim N^{2s} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\frac{\xi - N}{\omega})|^2 d\xi && \eta = \frac{\xi - N}{\omega} \Rightarrow d\xi = \omega d\eta \\ &= N^{2s} \cdot \omega = 1. && 0 < \varepsilon \ll |\xi| \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $u_N = u_{N,\omega}$, $\tilde{N} := N - \frac{N^{-\varepsilon}}{N^{2s}}$ und $v_N := u_{N,\omega}$.

Dann gibt es Konstanten $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, so dass

$$\varepsilon_0 \leq \|u_N(0)\|_{S,2}, \|v_N(0)\|_{S,2}, \|u_N(T)\|_{S,2}, \|v_N(T)\|_{S,2} \leq M,$$

wobei ist Teil (i) der Beh. erfüllt.

Ferner haben wir (weil $\text{supp}(\mathcal{F}_x u_N(T)), \text{supp}(\mathcal{F}_x v_N(T)) \subset B_\omega(N)$)
essentially

(i) Wie im Beweis angesprochen, basiert das Argument auf der Galilei-Invarianz der Gleichung und damit auf der Struktur der Nichtlinearität $N(u) = |u|^2 u$.

Betrachtet man andere kubische Nichtlinearitäten, so ist LWP in $H^s(\mathbb{R})$ mit $s < 0$ möglich, und zwar für

$$N_1(u) = u^3 \quad \text{sowie} \quad N_2(u) = \bar{u}^3 \quad , \quad s > -\frac{5}{12}$$

$$N_3(u) = |u|^2 \bar{u} = \bar{u}^2 u \quad , \quad s > -\frac{2}{5} \quad (\text{AG, 2002})$$

(keine Schranken möglicherweise technisch bedingt. $S_c = \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1}$

$$= \text{für } u=1, \quad \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \cdot)$$

$p=3$

(ii) Das Argument ist verallgemeinerbar, sofern man über (Halbwegs) explizite und stark konzentrierte Lösungsansätze (wie die sech-Solitonansätze) verfügt. Das ist der Fall bei NLS

$$i u_t + u_{xx} + |u|^{p-1} u = 0$$

in einer Raumdimension, $p \in (1, 5)$ und bei positivem Vorzeichen (focusing case, die Energie ist möglicherweise nicht definiert). Hier hat man also "ill-posedness below L^2 ". Im defocusing case stehen solche Lösungsansätze zur Verfügung, man verwendet Näherungslösungen, um zum selben Ergebnis zu gelangen, und das Argument wird deutlich aufwändiger (Christ, Colliander, Tao, 2002)

(iii) Relativ leicht ist eine Modifikation (ebenfalls von (168)

Kenig, Ponce und Vega) der strikten Rechnung auf eine komplexe Version der uKdV-Gleichung \rightarrow S. Überlegen.

Dort wird C_{unif}^0 -illposedness für complex uKdV
in $H^s(\mathbb{R})$ für $s < \frac{1}{4}$ gezeigt.

Führt man diese Überlegungen weiter, hat man die-
selbe Aussage für uKdV selbst. Wird das dann noch
mit der Miura-Transformation

$$V \mapsto V_x + \lambda V^2 = u$$

\uparrow Lösung von uKdV \downarrow Lösung von KdV

verknüpft, erhält man C_{unif}^0 -illposedness für
KdV in $H^s(\mathbb{R})$, sofern $s < -\frac{3}{4}$ ist.

(Auch in KP, 2001 und CCT, 2002!)

(iv) Wir finden also bei einer Reihe wichtiger nichtlinearer
dispersiver Gleichungen (siehe auch in einer Raum-
dimension) eine beträchtliche Lücke zwischen der Vorher-
sage aufgrund der scaling-Heuristik einerseits und
dem bestmöglichen Ergebnis, was die gl. stetige
Abhängigkeit der Lösungen von den Daten umfasst.
In dieser Situation hat man (ein Prinzip) zwei Mög-
lichkeiten für weitere Untersuchungen:

(1) Man geht zu einem schwächeren Begriff von
Wahlgestelltheit und verlangt nur die Stetigkeit
über

oder schwache Stetigkeit des Lösungsoperators. Dieser Weg wurde eingeschlagen von Koch und Tataru (2006, 2010) und von Christ, Colliander und Tao (2006).
 Bisher erreicht: A priori - Abschätzungen und Existenz von Lösungen in $C([-T, T], H^s(\mathbb{R}))$ bei Daten in $H^s(\mathbb{R})$ mit $s \geq -\frac{1}{4}$ (bei cubic NLS in einer Dimension), desgl. für uKdV ($s > -\frac{1}{8}$), KdV ($s \geq -1$) (Koch et al.)
 (Aufwändig, Work in progress. Der genaue Stand der Dinge kennen wir leider nicht.)

(2) Die zweite Möglichkeit besteht darin, die H^s -Skala zu verlassen und andere Datenräume zu betrachten. Die Kenntnis des Toffreman-Flein Abschätzung ($u=1!$)

$$\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^q_{x,t}} \lesssim \| \hat{u}_0 \|_{L^r} \quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

unter den Voraussetzungen $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{3}{9}}$ und $\boxed{\frac{1}{9} < \frac{1}{4}}$

legt die Verwendung des Datenraums

$$X = \widehat{L^r_x} := \{ u_0 \in S'(\mathbb{R}) : \| u_0 \|_{\widehat{L^r_x}} := \| \hat{u}_0 \|_{L^r} < \infty \}$$

nachzuweisen:

(1) Verhält sich unter Skalentransformationen wie L^r und damit wie H^s , sofern $s - \frac{1}{2} = -\frac{1}{r}$ ist. Das für cubic NLS interessante Bereich $s \in (-\frac{1}{2}, 0)$ entspricht also auf der $\widehat{L^r}$ -Skala dem Intervall $\frac{1}{r} \in (\frac{1}{2}, 1)$. Der kritische Raum wird $\widehat{L^1}$, das sind

temperaturverteilungswellen mit beschränkter Fouriertransformierte.
 leiert.

(2) Die Hausdorff-Young Ungleichung

$$\| \hat{f} \|_{\hat{L}^r} \lesssim \| f \|_{L^r} \quad 1 \leq r \leq 2$$

zeigt: Für $1 \leq r \leq 2$ ist $L^r \subset \hat{L}^r$ mit einer stetigen Einbettung, d.h. in diesem Bereich ist die "hat-space" sogar die größeren Räume. Da Hausdorff-Young auch für die inverse Fouriertransformation gilt, kehrt sich diese Einbettung für $r \in [2, \infty]$ gerade um.

Mit Hilfe von (Hausdorff-Young und) Fefferman-Stein können wir zeigen

Proposition 2: Sei $\frac{4}{3} < r < 2$. Dann ist das Cauchy-Problem

$u(t=0) = u_0 \in \hat{L}^r(\mathbb{R})$ für die aetiv NLS

$$i u_t + u_{xx} = \pm |u|^2 u$$

(in einer Raumdimension) lokal wohl gestellt.

(essentially in: Cazenave, Vega, Vilela; 2001)

Beweisskizze: Es seien

$$B_{R,T} := \{ u \in C([0,T], \hat{L}^r) \cap L^3_{T,x} : \|u\| \leq R \}$$

$$\|u\| = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{\hat{L}^r} + \|u\|_{L^3_{T,x}}$$

$$\text{und } \Lambda u(t) = e^{it\partial_x^2} u_0 \quad \forall t \in [0,T], \quad G(t) = \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t') dt'$$

Dann ist man

$$\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^r} = \| e^{-it|t|^2} \hat{u}_0 \|_{L^r} = \| \hat{u}_0 \|_{L^r} = \| u_0 \|_{L^r} \quad (121)$$

und $\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^{3r}} \lesssim \| u_0 \|_{L^r}$

aufgrund der Abschätzung von Fefferman und Stein. Bei Nichtlinearität schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\sup_{|t| \leq T} \| G(t) \|_{L^r} = \sup_{|t| \leq T} \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t') dt' \right\|_{L^r}$$

Liutowski + Isometrie-eigenschaft $\lesssim \int_0^T \| |u(t')|^2 u(t') \|_{L^r} dt'$

Hölder-Ungleichung $\lesssim \int_0^T \| u^3(t') \|_{L^r} dt' \lesssim T^{\frac{1}{r}} \| u \|_{L^{3r}}^3$

ferner: $\| G \|_{L^{3r}} \lesssim \int_0^T \| e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t') \|_{L^{3r}} dt'$

Fefferman-Stein $\lesssim \int_0^T \| |u(t')|^2 u(t') \|_{L^r} dt'$

wie oben $\lesssim T^{\frac{1}{r}} \| u \|_{L^{3r}}^3$

Ähnlich die Differenzabschätzung. Dann $R = 2c \| u_0 \|_{L^r}$, c die größte auftretende Konstante, ausreißend T hinreichend klein.

Stetigkeit der Lösung: Approximationen durch glatte Lösungen oder duale Variablen von FeSt. Für den Rest sind keine weiteren Argumente erforderlich. \square

Abschließende Bem.

- Kann auch für $r > 1$ gezeigt werden, erfordert keine Argumente,
- Sätze für den kritischen Fall $r = 1$ unklar.
 L^1 enthält verschiedene interessanten (abgeschlossenen) Teilräume, z. B.,
 - reelle/komplexe Maße, z. B. δ_0 : starke Form der ill-posedness (Nichtexistenz or Unstetigkeit für δ_0),
 - Fourierreihen in $C_0(\mathbb{R})$
 - $\sup L^1(\mathbb{R})$.

(Dauert: ENDE ABSCHLUSS 2.3)