2.2 Strichartz-Abschätzungen (für die Schrödinger-Gleichung)

Def.: Ein Paar (p,q) von Hölder-Exponenten heißt (Schrödinger-) zulässig (admissible), wenn

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{p} = \frac{n}{2}-\frac{n}{q} \quad \text{gelten.}$$

Satz 1 (Strichartz-Abschätzungen)

(i) Es seien $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann ist für jedes zulässige Paar (p,q)

$$u \in L_t^p(\mathbb{R}, L_x^q(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^n))$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|u_0\|_2 \tag{1}$$

(ii) Es seien (p,q) Schrödinger-zulässig, $f \in L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'}(\mathbb{R}^n))$ und $F(x,t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x,s)\,ds$. Dann ist $F \in L_t^p(\mathbb{R}, L_x^q(\mathbb{R}^n))$ und es gelten

$$\|F\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^q)} \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'})} \tag{2}$$

sowie

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(\cdot,t)\,dt \right\|_2 \lesssim \|f\|_{L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'})} \tag{3}$$

In (2), (3) kann $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges Intervall I mit $0 \in I$ ersetzt werden. Die impliziten Konstanten hängen nur von p, q und n ab.

Bem.: (i) Strichartz (1977) für $p=q$, nach Vorarbeiten von Stein und Tomas (1975) sowie Segal (1976). Die Verallgemeinerung auf den Nicht-Diagonalfall $p \neq q$ ist von Ginibre/Velo (1979). Ihr eleganter und einfacher Beweis wird unten wiedergegeben.

(ii) Für $n=2$ und $q=\infty$ sind die Aussagen falsch (Montgomery-Smith, 1998).

(iii) Für $n \geq 3$ sind die Endpunkt-Fälle mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ ebenfalls gezeigt worden: Keel/Tao (1998). Seither nennt man (p,q) mit $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ auch "admissible".

(iv) Abschätzung (2) ist eine Aussage über Lösungen der inhomogenen lineare Gleichung

$$iF_t + \Delta F = i f \qquad \text{mit} \qquad F(x,0) = 0.$$

Hiervon sind sind eine Reihe von Verallgemeinerungen bekannt, u.a. kann auf einer Seite ein admissible pair (p,q) durch ein anderes ersetzt werden (Cazenave, Thm. 2.3.3).

(v) Satz 1 gilt genauso für Lösungen der Gleichung

$$u_t = \langle \nabla_x, A \nabla_x \rangle u \quad (+f),$$

wenn A symmetrisch und invertierbar mit positiv semidefinitem Realteil ist. Für $n=1$ ebenso für Lösungen des linearen Teils

$$u_t - |D_x| \partial_x u = f$$

der Benjamin-Ono-Gleichung.

Für den Beweis benötigen wir:

- den time-decay-estimate $\| e^{it\Delta} u_0 \|_{q'} \lesssim |t|^{-\lambda} \|u_0\|_q$ mit $\lambda = \frac{4}{2}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) = \frac{4}{2} - \frac{4}{q}$ und $1 \leq q \leq 2 \leq q' \leq \infty$;
- die HLS-Ungleichung für die Zeitvariable, also in einer Dimension, d.h.:

$$\| |t|^{-\lambda} * g \|_{L^s_t} \lesssim \|g\|_{L^r_t}, \text{ sofern } \frac{1}{s'} = 1 - \lambda + \frac{1}{r'}, \; 0 < \lambda < 1;$$

- das TT^*-Argument. Dazu zunächst ein Begriff aus der Funktionalanalysis:

Sind E, F normierte Räume und $A: E \to F$ linear, so heißt $A': \underbrace{F' \to E'}_{\text{topologische Dualräume}}$, def. durch

$$A' \psi[x] := \psi[Ax] \quad \forall x \in E, \psi \in F'$$

die zu A duale Abbildung. Für die Operatornormen von A und A' haben wir

$$\|A'\| = \sup_{\substack{\psi \in F' \\ \|\psi\| \leq 1}} \|A'\psi\|_{E'} = \sup_{\substack{\psi \in F' \\ \|\psi\| \leq 1}} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |A'\psi[x]|$$

$$= \sup_{x \sim} \sup_{\psi \sim} |\psi[Ax]| \overset{(*)}{=} \sup_{x \sim} \|Ax\|_F = \|A\|.$$

Das bedeutet: A ist stetig genau dann stetig, wenn A' stetig ist.

Wenn die Anwendung von $\varphi \in E'$ auf $x \in E$ bzw. von $\psi \in F'$ auf $y \in F$ sich mit Hilfe von Skalarprodukten darstellen lässt als $\varphi[x] = \langle \varphi, x \rangle$ bzw. $\psi[y] = (\psi, y)$,

---

(*) Folgerung aus dem Satz v. Hahn-Banach, sog. Normformel so nimmt die definierende Gleichung die folgende Gestalt (125)

an:
$$\langle A'\psi, x\rangle = A'\psi[x] = \psi[Ax] = (\psi, Ax).$$

Man schreibt dann oft A^* statt A' und bezeichnet A^* als die adjungierte Abbildung. Hierbei können $\langle\, ,\, \rangle$ und $(\, ,\,)$ durchaus verschiedene Skalarprodukte sein.

<u>Lemma 1</u> <u>(TT^*):</u> Es seien H ein Hilbert-Raum, B ein Banachraum und $T: H \to B$ linear. Dann sind äquivalent:

(1) $T: H \to B$ ist stetig (mit Operatornorm $\|T\|$),

(2) $T^*: B' \to H$ ist stetig mit Norm $\|T^*\| = \|T\|$,

(3) $TT^*: B' \to B$ ist stetig mit Norm $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

<u>Bew.</u>: Nach der Vorbem. gilt $\|T\| = \|T^*\|$ und $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Da die Verkettung stetiger Abbildungen stetig und die Operatornorm submultiplikativ ist, folgt (3) mit "$\leq$" aus (1) und/oder (2). Nun gelte (3). Dann ist für $y \in B'$:
$$\|T^*y\|_H^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle \leq \|TT^*\|\, \|y\|_{B'}^2,$$
und also
$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \sup_{\substack{y \in B'\\ \|y\|_{B'} \leq 1}} \|T^*y\|_H^2 \leq \|TT^*\|. \qquad \square$$

Dieses Lemma wird angewendet auf den Lösungsoperator der homogenen Gleichung

$$\underset{\substack{\| \\ H}}{T: L^2} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ B}}{L_t^p(I, L_x^q)}, \quad u_0 \mapsto u, \quad u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$$

Lemma 2 (Dualräume gemischter L^p-Räume)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $1 \leq p, q < \infty$. Dann ist

$$\Phi : \quad L^{p'}_{\mu}(L^{q'}_{\nu}) \longrightarrow (L^p_{\mu}(L^q_{\nu}))' ,$$

def. durch $\Phi(g)[f] := \int\limits_{X \times Y} f(x,y) g(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$

ein isometrischer Isomorphismus.

Hierbei: $L^p_{\mu}(L^q_{\nu}) := \{ f : X \times Y \to \mathbb{C}, \; f \text{ ist } \mathcal{A} \times \mathcal{C}\text{-mb.}, \; \|f\|_{L^p_{\mu}(L^q_{\nu})} < \infty \}$

mit $\|f\|_{L^p_{\mu}(L^q_{\nu})} := \left(\int\limits_X \left(\int\limits_Y |f(x,y)|^q d\nu(y) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$.

Bekannt: Der Fall $p = q$: Ana III oder Einführung FA oder Seminar über Faltungen. Der Beweis für $p \neq q$ greift z.T. darauf zurück.

Beweisskizze: (i) Zweifache Anwendung der Hölderschen Ungleichung zeigt

$$|\Phi(g)[f]| \leq \|f\|_{L^p_{\mu}(L^q_{\nu})} \|g\|_{L^{p'}_{\mu}(L^{q'}_{\nu})} .$$

D.h. $\Phi(g) \in (L^p_{\mu}(L^q_{\nu}))'$ und $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_{L^{p'}_{\mu}(L^{q'}_{\nu})}$.

(ii) Φ ist eine Isometrie und damit insbes. injektiv.

Betrachte dazu Funktionen $g = \sum\limits_{k=1}^{N} g_{k1}(x) g_{k2}(y)$, dabei die Summanden zu verschiedenen Indizes k mit disjunkten Träger.

diese bilden einen dichten Teilraum (jedenfalls, solange $p', q' < \infty$; dieser Fall [$p' = \infty$ oder $q' = \infty$] macht zusätzliche Argumente erforderlich und soll hier nicht betrachtet werden.)

Sei allgemein $h(x,y) = \sum_{k=1}^{N} h_{k,1}(x)\, h_{k,2}(y)$ mit disjunkten Trägern für verschiedene k. Dann ist

$$\|h\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \Big(\int_X \Big(\int_Y \underbrace{\Big|\sum_{k=1}^{N} h_{k,1}(x)\, h_{k,2}(y)\Big|^q}_{\text{immer nur ein Summand!}} d\nu(y) \Big)^{\frac{p}{q}} d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(\int_X \Big(\sum_{k=1}^{N} |h_{k,1}(x)|^q \int_Y |h_{k,2}(y)|^q \, d\nu(y) \Big)^{\frac{p}{q}} d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{N} \int_X |h_{k,1}(x)|^p \, d\mu(x)\, \|h_{k,2}\|^p_{L^q_\nu} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{N} \|h_{k,1}\|_p^p \, \|h_{k,2}\|_q^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Nun sei $g \in L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)$ mit $g(x,y) = \sum_{k=1}^{N} g_{k,1}(x)\, g_{k,2}(y)$.

O.E. nehmen wir an, dass $1 = \|g\|_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \|g_{k,1}\|^{p'}_{p'} \|g_{k,2}\|^{p'}_{q'} \Big)^{\frac{1}{p'}}$

Dann führt die Wahl von $f(x,y) = \sum_{k=1}^{N} f_{k1}(x)\, u_k\, f_{k2}(y)$

mit $f_{k,1}(x) = |g_{k,1}(x)|^{p'-2}\,\overline{g_{k1}(x)}$, $f_{k,2}(y) = |g_{k,2}(y)|^{q'-2}\,\overline{g_{k,2}(y)}$

und $u_k = \|g_{k,2}\|_{q'}^{\frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}}$ (Nochmal: Der Exponent ist: $\frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}$)

auf $f \in L^p_\mu(L^q_\nu)$ mit $\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \dots = 1$ und

$$\Phi(g)[f] = \sum_{k=1}^{N} u_k \int_{X\times Y} |g_{k1}(x)|^{p'}\, |g_{k,2}(y)|^{q'}\, d\mu\times\nu(x,y) = 1$$

g normiert

also $\|\Phi(g)\| = \|g\|_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)} = 1$,

und das ist die behauptete Isometrieeigenschaft.

(iii) Φ ist surjektiv. Dazu sei Ψ ein stetiges lineares Funktional auf $L^p_\mu(L^q_\nu)$, wobei wir $1\le p<q<\infty$ voraussetzen.
(Der Fall $q<p$ ist ähnlich zu behandeln.)

Wir wählen eine Ausschöpfung $X=\bigcup_{R\in\mathbb{N}} M_R$ mit meßbaren Mengen $M_R\subset M_{R+1}\subset\dots$ endlichen Maßes, setzen $\chi_R(x):=\chi_{M_R}(x)$ und definieren $\Psi_R[h]:=\Psi[\chi_R\cdot h]$ für $h\in L^q_{\mu\times\nu}$. Dafür ist nämlich

$$\|\chi_R h\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)}\le\|\chi_R\|_{L^r_\mu}\|h\|_{L^q_{\mu\times\nu}},\quad \underbrace{\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}_{\text{geht, wenn } p<q.}$$

Dann ist also $|\Psi_R[h]|\le\|\Psi\|\,\|\chi_R\|_{L^r_\mu}\|h\|_{L^q_{\mu\times\nu}}$ und also Ψ_R ein stetiges lineares Funktional auf $L^q_{\mu\times\nu}$. Also existiert (nach der Standardversion des Satzes für $p=q$) ein $g_R\in L^{q'}_{\mu\times\nu}$, so dass $\Psi_R[h]=\int_{X\times Y}h(x,y)\,g_R(x,y)\,d\mu\times\nu(x,y)$.

Nun überlegt man sich: $g_R(x,y)=\chi_R(x)\,g_R(x,y)$ und

$$g_{R+1}(x,y)\cdot\chi_R(x)=g_R(x,y)\qquad\forall R\in\mathbb{N}.$$

Dann ist $g(x,y):=g_R(x,y)$, falls $x\in M_R$ wohldef. u. meßbar.

Nun ist noch $\Psi[f]=\int_{X\times Y}f(x,y)\,g(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$ und vor allem $g\in L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)$ zu zeigen. Dazu: $g_{R,N}:=g_R\cdot\chi_{\{|g|\le N\}}\in L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)$.

Nun sei $f\in L^p_\mu(L^q_\nu)$ mit $\operatorname{supp}(f)\subset M_R\times Y$. Dann ist

$$\left|\int_{X\times Y}g(x,y)f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\right|=\left|\int_{X\times Y}g(x,y)f(x,y)\cdot\chi_R(x)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\right|$$

$$=|\Psi_R[f]|=|\Psi[f]|\le\|\Psi\|\,\|f\|_{L^p_\mu L^q_\nu}$$

Jetzt erfolgt eine Wahl, die etwas Tüftelei erfordert hat:

(125d)

$$f(x,y) = |g_{R,N}(x,y)|^{q'-2}\,\overline{g(x,y)} \cdot \Big(\int_Y |g(x,y)|^{q'} d\nu(y)\Big)^{\frac{p'}{q'}-1}$$

Damit ist

$$\int_{X\times Y} g(x,y) f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \overset{\text{Rechnung}}{=} \|g_{RN}\|^{p'}_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)}$$

$$\le \|\Psi\|\, \|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} \overset{\text{Rechnung}}{=} \|\Psi\|\, \|g_{RN}\|^{\frac{p'}{p}}_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)}$$

$$\boxed{\frac{p'}{p} = p'-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \|g_{R,N}\|_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)} \le \|\Psi\|$$

Und die Grenzwerte $R \to \infty$, $N \to \infty$ kann man jetzt mit B. Levi behandeln: Ergebnis: $g \in L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)$ und $\|g\|_{L^{p'}_\mu(L^{q'}_\nu)} \le \|\Psi\|$.

Dann ist für $1 \le p,q < \infty$ der Dualraum $B' \cong L_t^{p'}(I, L_x^{q'})$ und wir bestimmen die Adjungierte

$$T^* : L_t^{p'}(I, L_x^{q'}) \longrightarrow L_x^2 \qquad \text{durch}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x)\, \bar{g}(x)\, dx = \langle T^* f, g \rangle \leftarrow \text{Stp. auf } H = L_x^2$$

$$\text{definierende Gleichung für } T^* \quad \overset{!}{=} (f, Tg) \leftarrow \text{Stp. auf } L_t^2(I, L_x^2)$$

$$= \int_{I \times \mathbb{R}^n} f(x,t)\, \overline{Tg(x,t)}\, dx\, dt \qquad T \text{ einsetzen}$$

$$= \int_I \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\, \overline{e^{it\Delta} g(x)}\, dx\, dt \qquad (e^{it\Delta})^* = e^{-it\Delta}$$

$$= \int_I \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\Delta} f(x,t)\, \overline{g(x)}\, dx\, dt \qquad \text{Fubini}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_I e^{-it\Delta} f(x,t)\, dt\, \bar{g}(x)\, dx = \left\langle \int_I e^{-it\Delta} f(\cdot,t)\, dt, g \right\rangle$$

und damit können wir ablesen:

$$T^* f(x) = \int_I e^{-it\Delta} f(x,t)\, dt$$

und

$$T T^* f(x,t) = \int_I e^{i(t-s)\Delta} f(x,s)\, ds$$

Schauen wir jetzt auf die Behauptungen im Satz 1, sehen wir: $(1) \Leftrightarrow (3)$ "by duality" und beides folgt aus (2), wenn dies auch mit einem beliebigen Intervall I anstelle von $[0,t]$ gezeigt wird.

Beweis von (2):

(i) Der Fall $q=2$, $p=\infty$: Hier haben wir mit $I_t \subset I \subset \mathbb{R}$:

$$\Big\| \int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \Big\|_{L_t^\infty(I,L_x^2)}$$

$$\leq \int_I \| e^{i(t-s)\Delta} f(s) \|_{L_x^2}\,ds = \|f\|_{L_t^1(I,L_x^2)}$$

(ii) $\frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, $\frac{2}{p} = \frac{n}{2}-\frac{n}{q}$. Minkowski's Ungleichung gibt

$$\Big\| \int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \Big\|_{L_x^q} \leq \int_I \| e^{i(t-s)\Delta} f(s) \|_{L_x^q}\,ds$$

$$\underset{\text{time decay}}{\lesssim} \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\lambda} \chi_I(s) \|f(s)\|_{L_x^{q'}}\,ds$$

$$= |t|^{-\lambda} * (\chi_I \|f\|_{L_x^{q'}})(t), \quad \lambda = \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}\Big)$$

Also mit HLS:

$$\Big\| \int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \Big\|_{L_t^p(I,L_x^q)}$$

$$\lesssim \Big\| |t|^{-\lambda} * \chi_I \|f\|_{L_x^{q'}} \Big\|_{L_t^p} \underset{(*)}{\lesssim} \| \chi_I f \|_{L_t^{p'}(L_x^{q'})} = \|f\|_{L_t^{p'}(I,L_x^{q'})}$$

wobei die HLS-Anwendung an der Stelle (*) erfordert, dass

$$0 < \lambda = \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}\Big) = \frac{n}{2}-\frac{n}{q} < 1 \iff 0 < \frac{1}{2}-\frac{1}{q} < \frac{1}{n} \iff \frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2},$$

wie vorausgesetzt, und dass

$$\frac{1}{p'} = 1-\lambda+\frac{1}{p} \iff \lambda = 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'} = \frac{2}{p} \iff \frac{2}{p} = \frac{n}{2}-\frac{n}{q},$$

was ebenfalls vorausgesetzt wurde.

Der bilineare Zugang zu Strichartz-Abschätzungen

Der oben dargestellte Standardbeweis der Strichartz-Abschätzungen beruht wesentlich auf dem time-decay-estimate, das im periodischen Fall nicht zur Verfügung steht. Hier kann man Teilergebnisse erzielen, indem man auf das einfache Argument

$$\| f \|_{L^4}^2 = \| f^2 \|_{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \| f \|_{L^{2k}}^k = \| f^k \|_{L^2}$$

zurückgreift. Für die L^2-Norm rechts kann man sich dann den Satz von Plancherel zunutze machen. Ein erstes Bsp. geht zurück auf A. Zygmund (1920er ?): (Studia Math. 50, 1974)

Lemma 3: Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ und $e^{it\partial_x^2} u_0$ die Lösung von $iu_t + \partial_x^2 u = 0$, $u(t=0) = u_0$. Dann gilt

$$\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \| u_0 \|_{L^2_x(\mathbb{T})}.$$

Bew.: $\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^4_{xt}}^4 = \| (e^{it\partial_x^2} u_0)^2 \|_{L^2_{xt}}^2 = \| \mathcal{F}_x (\dots)^2 \|_{L^2_{\xi,t}}^2$ partielle FT in x und Planch.

$$= c \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} | \mathcal{F}_x (e^{it\partial_x^2} u_0)^2 |^2 \, dt$$

und wir haben $\mathcal{F}_x (\quad)^2 (\xi) = c \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}} e^{it(\xi_1^2 + (\xi - \xi_1)^2)} \widehat{u_0}(\xi_1) \widehat{u_0}(\xi - \xi_1)$

also $| \mathcal{F}_x (e^{it\partial_x^2} u_0)^2 (\xi) |^2$

$$= c \sum_{\xi_1, \eta_1 \in \mathbb{Z}} e^{it(\xi_1^2 + (\xi - \xi_1)^2 - \eta_1^2 - (\xi - \eta_1)^2)} \widehat{u_0}(\xi_1) \widehat{u_0}(\xi - \xi_1) \overline{\widehat{u_0}(\eta_1)} \overline{\widehat{u_0}(\xi - \eta_1)}$$

Bei Integration über t von $-\pi$ bis π fällt eine Summe auf zwei Summanden zusammen, denn es ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\xi_1^2+(\xi-\xi_1)^2-\eta_1^2-(\xi-\eta_1)^2)}\,dt \neq 0$$

nur dann, wenn $\xi_1^2+(\xi-\xi_1)^2 = \eta_1^2+(\xi-\eta_1)^2$, d.h. wenn $\xi_1 = \eta_1$ oder wenn $\xi-\xi_1 = \eta_1$ ist. Also haben wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2(\xi)|^2\,dt$$

$$= c\cdot\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 + |\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

$$= c\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

Summation über $\xi\in\mathbb{Z}$ liefert

$$\|e^{it\partial_x^2}u_0\|^4_{L^4_{xt}} = c\sum_{\xi,\xi_1\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 \overset{\text{Plancherel}}{=} c\|u_0\|^4_{L^2_{x}(\mathbb{T})} \qquad \square$$

Um Lemma 1 auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern zu können, benötigen wir das folgende Ergebnis aus der elementaren Zahlentheorie:

Hardy-Wright: Introduction to the theory of numbers; Thm. 338:
Sei $N\in\mathbb{N}$ und $r(N) := \#\{\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{Z}^2 : |\xi|^2 = N\}$. Dann gilt $r(N) \ll N^\varepsilon$, d.h.: Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert ein $C_\varepsilon>0$, so dass $r(N)\le C_\varepsilon N^\varepsilon$.

Bem.: (i) C_ε ist natürlich unabhängig von N.

(ii) Trivial wäre: $r(N) \leq C\sqrt{N}$ (Abstand der Gitterpunkte ≥ 1 und Länge des Kreises $= 2\pi\sqrt{N}$).

(iii) Im Beweis wird die Aussage zurückgeführt auf die entsprechende Abschätzung für die Anzahl $d(N)$ der Teiler einer natürlichen Zahl N. Es gilt $d(N) << N^\varepsilon$ (HW, Thm. 315) und $r(N) \leq 4d(N)$.

(iv) Die Abschätzung kann nicht wesentlich verbessert werden, es gilt: Für jedes $\delta \geq 0$ und jedes $C>0$ wird die Abschätzung $r(N) \leq C \cdot \ln(1+N^\delta)$ falsch.

(v) Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen: $\forall \varepsilon>0 \, \exists C_\varepsilon$:

$$\#\{\xi \in \mathbb{Z}^n : |\xi|^2 = N\} \leq C_\varepsilon N^{\frac{n-2}{2}+\varepsilon}$$

Letzteres sieht man induktiv ein, indem man schreibt:

$$\{\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{Z}^n : |\xi|^2 = N\} = \bigcup_{\xi_n^2 \leq N} \{\xi' \in \mathbb{Z}^{n-1} : |\xi'|^2 = N - \xi_n^2\}$$

Für die Anzahlen hat man dann nach I.V.:

$$\#\{\xi \in \mathbb{Z}^n : |\xi|^2 = N\} \leq \sqrt{N} \cdot \#\{\xi' \in \mathbb{Z}^{n-1} : |\xi'|^2 = M\} \quad (M \leq N)$$

$$\leq \sqrt{N} \cdot C_\varepsilon N^{\frac{n-3}{2}+\varepsilon} = C_\varepsilon N^{\frac{n-2}{2}+\varepsilon}.$$

Damit können wir zeigen:

Proposition 1 (Bourgain, 1993): Es seien $n \geq 2$ und $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $u_0 = P_N u_0$ sowie $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon} \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$$

Bem.: Wir schreiben weiter

$$\|u\|^4_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|u^2\|^2_{L^2_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|\mathcal{F}(u^2)\|^2_{L^2_{\xi,\tau}(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z})},$$

wobei $\mathcal{F}$ jetzt die Fouriertransformation bezüglich der Raum- und Zeitvariablen ist. Mit dem Faltungssatz erhalten wir zunächst

$$\mathcal{F}_x(u^2)(\xi,t) = c \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} e^{-it(|\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2)} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)$$

und weiter

$$\mathcal{F}(u^2)(\xi,\tau) = c \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1).$$

Das Quadrat des Absolutbetrags hiervon schätzen wir gleich ab mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, wobei wir von $u_0 = P_N u_0 = \mathcal{F}^{-1}\chi_N \mathcal{F} u_0$ und $\delta_{\tau,k} = \delta^2_{\tau,k}$ (Kronecker-Delta!) Gebrauch machen:

$$|\mathcal{F}(u^2)(\xi,\tau)|^2 \leq c^2 \, \Sigma_1(\xi,\tau) \cdot \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

mit

$$\Sigma_1(\xi,\tau) = \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2} \chi_N(\xi_1)\chi_N(\xi-\xi_1)$$

Jetzt sollen die Ergebnisse aus der Zahlentheorie zur Abschätzung von Σ_1 herangezogen werden, was nicht unmittelbar einsichtig ist. Wir schreiben

$$|\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2 = 2|\xi_1|^2 - 2\langle \xi, \xi_1\rangle + |\xi|^2 = 2\langle \xi_1 - \xi, \xi_1\rangle + |\xi|^2$$

und

$$\delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2} = \delta_{2\tau, 2(|\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2)} = \delta_{2\tau - 2|\xi|^2, \langle 2(\xi_1-\xi), 2\xi_1\rangle}$$

Jetzt führen wir die neue Variable

$$k_1 := 2\xi_1 - \xi \quad \Longrightarrow \quad 2(\xi_1 - \xi) = k_1 - \xi \quad \text{und} \quad 2\xi_1 = k_1 + \xi$$

ein, so dass $\quad \langle 2(\xi_1 - \xi), 2\xi_1 \rangle = \langle k_1 - \xi, k_1 + \xi \rangle = |k_1|^2 - |\xi|^2$

und $\quad \delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi - \xi_1|^2} = \delta_{2\tau - |\xi|^2, |k_1|^2}$.

Beachten wir noch $\mathcal{X}_N(\xi_1) = \mathcal{X}_{2N}(2\xi_1) = \mathcal{X}_{2N}(k_1 + \xi)$, $\mathcal{X}_N(\xi - \xi_1) = \mathcal{X}_{2N}(k_1 - \xi)$

erhalten wir

$$\Sigma_1(\xi, \tau) \leq \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{2\tau - |\xi|^2, |k_1|^2} \mathcal{X}_{2N}(k_1 + \xi) \mathcal{X}_{2N}(k_1 - \xi)$$

(Bem.: Wir haben $k_1 = 2\xi_1 - \xi \in \mathbb{Z}^n$. Dass es nicht zu jedem $k_1 \in \mathbb{Z}^n$ ein entsprechendes $\xi_1 \in \mathbb{Z}^n$ gibt, ist kein Fehler, denn indem wir über k_1 anstelle von ξ_1 summieren, vergrößern wir die Summe.)

Nun haben wir ein Summationsgebiet

$$|2k_1| \leq |k_1 + \xi| + |k_1 - \xi| \leq 4N \Longrightarrow |k_1| \leq 2N$$

und also mit $r = 2\tau - |\xi|^2$

$$\Sigma_1(\xi, \tau) \leq \max_{r=0}^{4N^2} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{r, |k_1|^2} = \max_{r=0}^{4N^2} \# \{ k_1 \in \mathbb{Z}^n : |k_1|^2 = r \}$$

$$\leq c_\varepsilon (N^2)^{\frac{n-2}{2} + \varepsilon} = c_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon}$$

Zusammenfassung ergibt

$$|\mathcal{F}(u^2)(\xi, \tau)|^2 \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \cdot \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} \delta_{\tau, |\xi_1|^2 + |\xi - \xi_1|^2} |\hat{u}_0(\xi_1) \hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2$$

Summation über τ:

$$\| \mathcal{F}(u^2)(\xi, \cdot) \|^2_{L^2_\tau(\mathbb{Z})} \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} |\hat{u}_0(\xi_1) \hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2$$

und schließlich Summation über $\xi \in \mathbb{Z}^n$:

$$\|u\|^4_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|\mathcal{F}(u^2)\|^2_{L^2_{\xi,\tau}(\mathbb{Z}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \sum_{\xi,\xi_1 \in \mathbb{Z}^n} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

$$= N^{n-2+\varepsilon} \|\hat{u}_0\|^4_{L^2_\xi(\mathbb{Z}^n)} \overset{\text{Plancherel}}{=} N^{n-2+\varepsilon} \|u_0\|^4_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$$

Ziehen wir hieraus die $\sqrt[4]{\ }$, ergibt sich die Beh. $\square$

<u>Diskussion:</u>

(i) Für $n \geq 5$ kann man mit einer besseren Abschätzung für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 5 Quadraten $\varepsilon = 0$ erreichen (Grosswald: "Representations of integers as sums of squares), mit anderen Argumenten (Bourgain 1993, recht aufwändig) gelingt dies auch für $n=4$. Für die Anwendungen sind diese Verbesserungen allerdings von recht geringer Bedeutung. Für $n \in \{2,3\}$ wird die Aussage <u>falsch</u> für $\varepsilon = 0$.

(ii) In einer Raumdimension kann man mit ähnlichen Argumenten zeigen (Bourgain '93):

Ist $u_0 = P_N u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ und $u(x,t) = e^{it\partial_x^2}u_0$, so gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\varepsilon N^\varepsilon \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}$$

Man schreibt dazu $\|u\|^6_{L^6_{xt}} = \|u^3\|^2_{L^2}$ und benutzt

$$\#\{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2 : 3k_1^2 + k_2^2 = N\} \leq c\, d(N) << N^\varepsilon$$

<u>Abschätzung wird falsch</u> für $\varepsilon = 0$!

Petersson, H.: Modulfunktionen und quadratische Formen, Satz 6.2

<u>Open problem:</u> $\|u\|_{L^p_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}$ für $p \in (4,6)$?

(iii) Durch dyadische Zerlegung einer Funktion $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ erhalten wir als

<u>Folgerung 1</u> (aus Prop. 1 und Bem. (ii)): Sei $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ und $u(x,t) = e^{it\Delta} u_0(x)$. Dann hat man die "Strichartz-type"-estimates:

$n=1$: $\quad \|u\|_{L^6(\mathbb{T}^2)} \lesssim_s \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})}$ für jedes $s>0$;

$n \geq 2$: $\quad \|u\|_{L^4(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_s \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$ für jedes $s > \frac{n-2}{4}$,

und nach Bem. (i) lässt sich für $n \geq 4$ sogar $s \geq \frac{n-2}{4}$ erreichen

Begründung: Mit $Q_0 = P_0$ und $Q_N = P_{\Delta N}$ haben wir

$$\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \leq \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} \|Q_N u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\varepsilon \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^\varepsilon \|Q_N u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

$$\varepsilon = \tfrac{s}{2} \qquad \lesssim \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon} N^s \|Q_N u_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim_\varepsilon \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})}$$

und genauso für die höherdimensionalen L^4-Abschätzungen.

Um Gleichheit für $n \geq 4$ zu erhalten, benutzt man den Satz von Littlewood-Paley:

$$\|u\|^2_{L^4} \lesssim \Big\| \Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} (Q_N u)^2 \Big)^{1/2} \Big\|^2_{L^4} = \Big\| \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} (Q_N u)^2 \Big\|_{L^2}$$

$$\leq \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} \|(Q_N u)^2\|_{L^2} = \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} \|Q_N u\|^2_{L^4}$$

$$\underset{\substack{\text{Prop.,} \\ \text{Bem. (i)}}}{\lesssim} \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s} \|Q_N u_0\|^2_{L^2} = \|u_0\|^2_{H^s}$$

(iv) Vergleich mit den Strichartz-Abschätzungen im nicht ~~[illegible]~~ periodischen Fall: Dort haben wir für

$n=1$: $\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$

$n=2$: $\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$

Man verliert also im periodischen gegenüber dem $\mathbb{R}^n$-Fall eine ε-Ableitung

$n=3$: Die Bedingung für die Strichartz-Abschätzungen lautet $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$. Mit $n=3$ und der Wahl $p=4$ (um vergleichen zu können) ergibt sich $\frac{2}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{q}$, also $q=3$. Zusammen mit dem Sobolevschen Einbettungssatz also

$$\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{R}^4)} \lesssim \|J_x^{\frac{1}{4}} u\|_{L^4_t(\mathbb{R}, L^3_x(\mathbb{R}^3))} \lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{1}{4}}}.$$

Das heißt: Auch hier haben wir eine ε-Ableitung Verlust, und zusätzlich den Nachteil, dass die Festlegung der Hölder-Exponenten $q=p=4$ die Sobolev-Anwendung und den damit verbundenen Ableitungsverlust quasi erzwingt.

$n \geq 4$: Man kann ähnlich argumentieren wie für $n=3$. Der ε-Ableitung Verlust fällt sogar weg. Die Verschwendung von Ableitungen wg. der Einschränkung auf einen speziellen Hölder-Exponenten fällt umso mehr ins Gewicht.

(v) Anmerkung der Galileo-Invarianz

Betrachten wir $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{u}_0 = \chi_{B_r(\xi_0)}$, $r \ll |\xi_0| = N$

Dann wird der Ableitungsverlust in Bem. (iii) bestimmt von N: $\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim N^{\frac{n-2}{4}(+\varepsilon)} \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$

während wir für v_0 auf $\hat{v}_0 = \chi_{B_r(0)}$ nur einen Faktor (136)
$r^{\frac{n-2}{4}(+\varepsilon)}$ ausgeben müssen. Diesen Mangel kann man ausgleichen, indem man die Invarianz der Schrödingergleichung unter sogenannten Galileo-Transformationen verwendet.

Def.: Es sei $u : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $G_{\xi_0} : u \mapsto G_{\xi_0} u$, definiert durch

$$G_{\xi_0} u(x,t) := \exp(-ix\cdot\xi_0 - it|\xi_0|^2)\, u(x+2t\xi_0, t)$$

eine Galileo-Transformation.

Lemma 4 (Galilei-Invarianz): Sei $u : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$ eine Lösung der (semi)linearen Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u = c|u|^{p-1}u, \qquad (c \in \mathbb{C}, p>1) \qquad \text{(NLS)}$$

$\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v = G_{\xi_0} u$. Dann löst v dieselbe Gleichung.

Bew. Zur Abkürzung schreiben wir manchmal $x' = x + 2t\xi_0$.

$$i\partial_t v(x,t) = (i\partial_t \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2))\, u(x',t) + \exp(\dots)\, iu_t(x',t)$$
$$+ \exp(\dots)\cdot i\nabla_x u(x',t)\cdot 2\xi_0$$
$$= \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)\{|\xi_0|^2 u(x',t) + 2i\xi_0\cdot\nabla_x u(x',t) + iu_t(x',t)\}$$

$$\Delta_x v(x,t) = (\Delta_x \exp(-ix\cdot\xi_0 - it|\xi_0|^2))\cdot u(x',t)$$
$$+ 2\nabla_x \exp(-ix\cdot\xi_0 - it\cdot|\xi_0|^2)\cdot\nabla_x u(x',t)$$
$$+ \exp(-ix\cdot\xi_0 - it|\xi_0|^2)\cdot\Delta_x u(x',t)$$

$$= \exp(-ix\xi_0 - i|\xi_0|^2 t)\{-|\xi_0|^2 u(x',t) - 2i\,\xi_0\cdot\nabla_x u(x',t) + \Delta_x u(x',t)\}$$

Addition ergibt

$$(i\partial_t + \Delta)v(x,t) = \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)(i\partial_t + \Delta_x)u(x',t)$$

$$\underset{(NLS)}{=} c\cdot\exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)|u|^{p-1}u(x',t) = c|v|^{p-1}v(x,t).$$

□

Damit können wir zeigen:

Folgerung 2 (aus Prop. 1) Es seien $B = B_N(\xi_0)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $P_B = \mathcal{F}_x^{-1}\chi_B\mathcal{F}_x$ und $u_0 \in L_x^2$ mit $u_0 = P_B u_0$ und $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$$

und $\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\varepsilon N^\varepsilon\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}$.

Bew.: Zuerst stellen wir fest, dass $\|G_{\xi_0}u\|_{L^p_t(L^q_x)} = \|u\|_{L^p_t(L^q_x)}$ und ebenso $\|G_{\xi_0}u_0\|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}$, da weder der Phasenfaktor noch die Verschiebung diese Normen ändern.

Dann haben wir für die partielle Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_x G_{\xi_0}u(\xi,t) = \exp(-it|\xi_0|^2 - 2it\,\xi\cdot\xi_0)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t)$$

und, wenn mit $u_0 = P_B u_0$ auch $u = P_B u$ ist:

$$= \exp(-t|\xi_0|^2 - 2t\,\xi\cdot\xi_0)\chi_B(\xi+\xi_0)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t)$$

$$= \exp(-t\dots)\chi_{B_0}(\xi)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t), \quad B_0 = B_N(0)$$

Also haben wir nach Fourierrücktransformation

$$G_{\xi_0} P_B u = P_{B_0} G_{\xi_0} u$$

und damit die Ungleichungskette

$$\| P_B u \|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \| G_{\xi_0} P_B u \|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \| P_{B_0} G_{\xi_0} u \|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})}$$

$$\overset{\text{Prop. 1}}{\lesssim_\varepsilon} N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon} \| G_{\xi_0} u(t=0) \|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)} = N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon} \| u_0 \|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}.$$

Mit dieser Folgerung kann man dann auch tatsächlich (fast) optimale Ergebnisse erzielen, dazu muss man allerdings bei den Abschätzungen der Nichtlinearität dyadisch zerlegen, was etwas kompliziert werden kann.

Anwendungen des "bilinear approach" im nicht-periodischen Fall: Hier kann man den $\|f\|^2_{L^4} = \|f^2\|_{L^2}$ – "Trick" dazu verwenden:

(i) Bilineare Verfeinerungen und

(ii) für $n=1$ Verallgemeinerungen der linearen Strichartz-Abschätzungen

zu zeigen. Beginnen wir mit einer scharfen bilinearen Abschätzung in einer Raumdimension, die einen Gewinn einer halben Ableitung aufweist. Das folgende Lemma ist "due to" Tohru Ozawa und Yoshio Tsutsumi (1998).

Lemma 5: Es seien $u_0, v_0 \in L^2_x(\mathbb{R})$ und $u(x,t) = e^{it\partial_x^2} u_0(x)$ sowie $v(x,t) = e^{-it\partial_x^2} v_0(x)$. Dann gilt:

$$\| \, |D_x|^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_{L^2_x} \|v_0\|_{L^2_x}$$

Bem. (i) Gewinn einer halben Ableitung! (So etwas ist bei den linearen Strichartz-Abschätzungen nicht möglich.)

(ii) Scharf. Es ist eine Gleichung (nicht nur eine Ungleichung), und sogar die Konstante ist exakt bestimmt.

Bew.: O.E. nehmen wir $u_0, v_0 \in S(\mathbb{R})$ an und berechnen zuerst die partielle Fouriertransformation $\mathcal{F}_x(|D_x|^{\frac{1}{2}}(u \cdot v))(\xi,t)$ bezüglich der Ortsvariablen x. Mit dem Faltungssatz erhalten wir

$$\mathcal{F}_x(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv))(\xi,t) = \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi_1^2 - (\xi-\xi_1)^2)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi-\xi_1) d\xi_1$$

und für das Quadrat des Betrages ein Doppelintegral

$$(*) := |\mathcal{F}_x(|D_x|^{\frac{1}{2}}(u \cdot v))(\xi,t)|^2$$

$$= \frac{|\xi|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it(\xi_1^2 - (\xi-\xi_1)^2 - \eta_1^2 + (\xi-\eta_1)^2)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi-\xi_1) \overline{\hat{u}_0}(\eta_1) \overline{\hat{v}_0}(\xi-\eta_1) d\xi_1 d\eta_1$$

Für das Argument der exp-Funktion ergibt sich

$\xi_1^2 - (\xi-\xi_1)^2 - \eta_1^2 + (\xi-\eta_1)^2 = \xi_1^2 - \xi^2 + 2\xi\xi_1 - \xi_1^2 - \eta_1^2 + \xi^2 - 2\xi\eta_1 + \eta_1^2 = 2\xi(\xi_1 - \eta_1)$, d.h.

$$(*) = \frac{|\xi|}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it2\xi(\xi_1-\eta_1)} \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi-\xi_1) \overline{\hat{u}_0}(\eta_1) \overline{\hat{v}_0}(\xi-\eta_1) d\xi_1 d\eta_1$$

Integration nach t liefert

$$\| \mathcal{F}_x (|D_x|^{\frac{1}{2}} (uv))(\xi, \cdot) \|^2_{L^2_t} = \int_{\mathbb{R}} (*) \, dt$$

$$= |\xi| \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it2\xi(\xi_1 - \eta_1)} dt \ \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi - \xi_1) \overline{\hat{u}_0(\eta_1)} \overline{\hat{v}_0(\xi - \eta_1)} d\xi_1 d\eta_1$$

wobei wir das innere Integral als Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}_t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) (2\xi(\xi_1 - \eta_1)) = \delta_0 (2\xi(\xi_1 - \eta_1)) \overset{\text{Aufg. 7}}{=} \frac{1}{2|\xi|} \delta_0(\xi_1 - \eta_1)$$

auffassen können. Die $|\xi|$-Faktoren heben sich gerade auf,

$$\ldots = \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \delta_0(\xi_1 - \eta_1) \hat{u}_0(\xi_1) \hat{v}_0(\xi - \xi_1) \overline{\hat{u}_0(\eta_1)} \overline{\hat{v}_0(\xi - \eta_1)} d\eta_1 \, d\xi_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{v}_0(\xi - \xi_1)|^2 d\xi_1$$

Anschließende Integration nach ξ und Plancherel ergeben:

$$\| |D_x|^{\frac{1}{2}} (uv) \|^2_{L^2_{xt}} = \| \mathcal{F}_x (|D_x|^{\frac{1}{2}} (uv)) \|^2_{L^2_{\xi t}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{v}_0(\xi - \xi_1)|^2 d\xi \, d\xi_1 = \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2_x} \|v_0\|^2_{L^2_x} ,$$

und wenn wir hieraus die $\sqrt{}$ ziehen, folgt die Beh. $\square$

Wir können das Argument zum Beweis von Lemma 5 mit dem Sobolevschen Einbettungssatz und der HLS-Ungleichung verbinden, um eine Verallgemeinerung der Strichartz-Abschätzungen für die Schrödinger-Gleichung in einer Raumdimension zu beweisen:

<u>Lemma</u> 6: Es seien $4 < q < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, $u_0 \in S'(\mathbb{R})$ und $\hat{u}_0 \in L^{r'}(\mathbb{R})$ und $u = e^{it\partial_x^2} u_0$. Dann gilt

$$\| u \|_{L^4_t(L^q_x)} \lesssim \| \hat{u}_0 \|_{L^{r'}_\xi} .$$

<u>Bew.</u>: Wieder sei $u_0 \in S(\mathbb{R})$ angenommen. Wir schreiben

$$\| u \|^2_{L^4_t(L^q_x)} = \| |u|^2 \|_{L^2_t(L^{q/2}_x)} \lesssim \| |D_x|^\varepsilon |u|^2 \|_{L^2_{xt}} ,$$

letzteres für $\varepsilon - \frac{1}{2} = -\frac{2}{q}$ aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes. Es folgt ① $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{2}{q}}$

$$\| u \|^4_{L^4_t(L^q_x)} \lesssim \| |D_x|^\varepsilon |u|^2 \|^2_{L^2_{xt}} = \text{... Rechnung wie zu Lemma 5...}$$

$$= c \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\varepsilon - 1} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2 \, d\xi_1 \, d\xi$$

$$= c \cdot \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\varepsilon - 1} |\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2 d\xi \quad d\xi_1$$

Reflection

$$= c \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 \cdot (|\xi|^{2\varepsilon - 1} * |R\hat{u}_0|^2)(\xi_1) \; d\xi_1$$

$$\lesssim \| |\hat{u}_0|^2 \|_{L^{r'/2}_\xi} \cdot \| |\xi|^{2\varepsilon - 1} * |R\hat{u}_0|^2 \|_{L^s_\xi}$$

aufgrund der Hölderschen Ungleichung, die ② $\boxed{1 = \frac{2}{r'} + \frac{1}{s}}$ erfordert. Für den ersten Faktor haben wir

$$\| |\hat{u}_0|^2 \|_{L^{r'/2}_\xi} = \| \hat{u}_0 \|^2_{L^{r'}_\xi} , \quad \text{wie gewünscht.}$$

Für den zweiten Faktor verwenden wir die HLS-Ungleichung

$$\| |x|^{-\lambda} * f \|_{L^s} \lesssim \| f \|_{L^\sigma},$$

deren Voraussetzungen in einer Dimension lauten

$0 < \lambda < 1$ und $\frac{1}{s'} = (1-\lambda) + \frac{1}{\sigma'}$, hier also mit

$\lambda = 1 - 2\varepsilon \overset{①}{=} 1 - 1 + \frac{4}{q} = \frac{4}{q} \in (0,1)$, da $4 < q < \infty$ vorausgesetzt

ist, und mit $\sigma = \frac{r'}{2}$ (sowie $f = |R\hat{u}_0|^2$). Die zweite

Bed. lautet

$$\frac{2}{r'} \overset{②}{=} \frac{1}{s'} = 2\varepsilon + 1 - \frac{1}{\sigma} \overset{①}{=} 1 - \frac{4}{q} + 1 - \frac{2}{r'}$$

$$\iff \frac{4}{r'} = 2 - \frac{4}{q} \iff \frac{1}{r'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

wie ebenfalls vorausgesetzt. Also haben wir für den 2. Faktor

$$\| |\xi|^{2\varepsilon-1} * |R\hat{u}_0|^2 \|_{L^s_\xi} \lesssim \| |R\hat{u}_0|^2 \|_{L^{r'/2}_\xi} = \| \hat{u}_0 \|^2_{L^{r'}_\xi}$$

und damit insgesamt nach $\sqrt[4]{}$

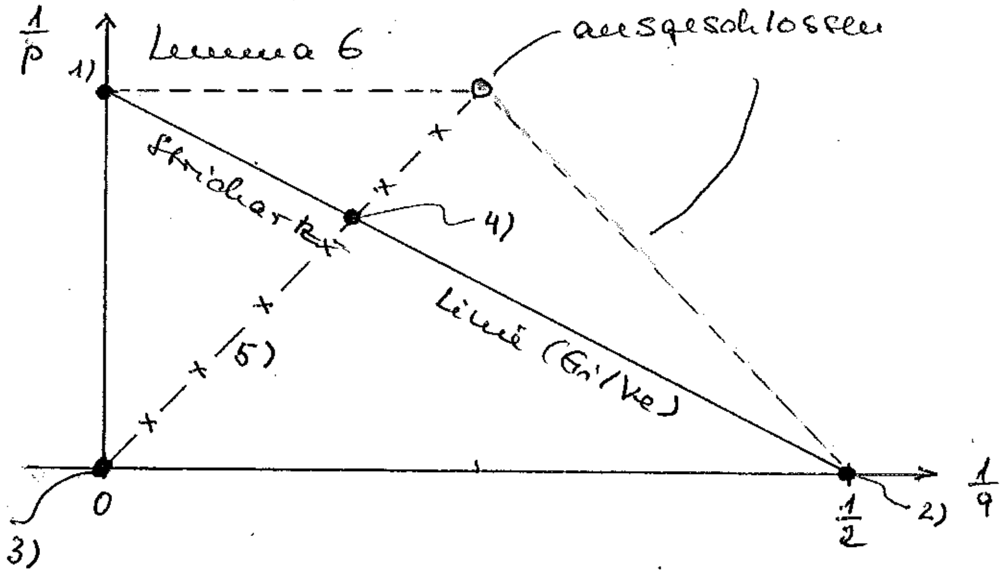
$$\| u \|_{L^4_t(L^q_x)} \lesssim \| \hat{u}_0 \|_{L^{r'}_\xi}, \text{ wie behauptet.} \qquad \square$$

Inwiefern handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Strichartz-Abschätzungen für die SG in einer Raumdimension? Diese Frage lässt sich am besten mit Hilfe eines Diagramms beantworten, in dem wir den Geltungsbereich der etwas allgemeineren Abschätzung

$$\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L^p_t L^q_x} \lesssim \| \hat{u}_0 \|_{L^{r'}_\xi} \qquad (*)$$

eintragen. Ein scaling-Argument zeigt, dass hierfür die Bedingung $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} + \frac{1}{q}$ notwendig ist.

(Die Norm $\|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi}$ verhält sich unter scaling wie $\|u_0\|_{L^r_x}$; im obigen Lemma 6: $p=4$; in den Strichartz-Abschätzungen für $n=1$: $r=2$.) Also können wir die Situation in einem $\frac{1}{p} / \frac{1}{q}$-Diagramm darstellen:



1) $L^4_t L^\infty_x$: Endpunkt-Strichartz-Abschätzung, gilt für $n=1$.

2) $L^\infty_t L^2_x$: Erhaltung der L^2_x-Norm, sozusagen der andere, vielleicht "triviale" Endpunkt für Strichartz.

zwischen 1) und 2) ist die Strichartz-Linie, wie von Gi/Ve verallgemeinert

3) $\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L^\infty_{xt}} \leq \sup_t \|e^{it\xi^2}\hat{u}_0\|_{L^1_\xi} = \|\hat{u}_0\|_{L^1_\xi}$,

wenn man hochgreift: Riemann-Lebesgue-Lemma.

4) Die von Strichartz bewiesene L^6_{xt}-Abschätzung.

5) Die Diagonale $p=q$: Fefferman und Stein (1970), !

Restriktionssatz für die Fouriertransformation.

In der dargestellten Situation kann man nun eine Verallgemeinerung des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin auf gemischte L^p-Räume (Bergh-Löfström oder Triebel) verwenden, um zu folgern, dass die Abschätzung (*) in dem gesamten konvexen Bereich gilt, der von

- der Lemma 6 - Linie einschließlich 1),
- dem Trivialfall 3) und
- der Erhaltung der L^2-Norm 2)

aufgespannt wird.

<u>Folgerung</u> (aus Lemma 6): Es gelte $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} + \frac{1}{q}$. Dann gilt die Abschätzung $\| e^{it\partial_x^2} u_0 \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \| \hat{u}_0 \|_{L_\xi^{r'}}$, sofern eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $0 \le \frac{1}{p} \le \frac{1}{4}$ und $0 \le \frac{1}{q} < \frac{1}{4}$ oder

(ii) $\frac{1}{4} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ oder

(iii) $(p,q) = (\infty, 2)$.

<u>Bem.</u>: Damit erhalten wir einen Hinweis auf geeignete Datenräume, wenn die Möglichkeiten der H^s-Skala ausgeschöpft sind, zumindest für eine lokale (in t) Theorie: Es sind dies die Räume

$$\widehat{H}^s_r(\mathbb{R}^n) := \{ u_0 \in S'(\mathbb{R}^n) : \| u_0 \|_{\widehat{H}^s_r} < \infty \}$$

mit $\| u_0 \|_{\widehat{H}^s_r} = \| \widehat{J^s u_0} \|_{L_\xi^{r'}}$. Als B_{pk} allgemeiner bei Hörmander, als $\widehat{L^p_s}$ bei Christ und Schülern. Beachte: $\| e^{it|\xi|^2} \hat{u}_0 \|_{L_\xi^{r'}} = \| \hat{u}_0 \|_{L_\xi^{r'}}$, der lin. Propagator ist also well-behaved!

Bem. zu höherdimensionalen Varianten:

Das Argument aus dem Bew. von Lemma kann auch in höheren Raumdimensionen für bilineare Verfeinerungen der Strichartz-Abschätzungen genutzt werden. Z.B. gilt die Verschärfung der zweidim. L^4_{xt}-Abschätzung, dass

$$\| (D_x^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} u_0)(e^{it\Delta} v_0) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x} \, \| \nabla^s v_0 \|_{L^2_x}, \quad s > \frac{1}{2}. \quad (*)$$

(Bourgain, 1998). Interessant ist das für folgende Frequenzverteilung:

ξ_1 = Frequenz von u_0, ξ_2 diejenige von v_0, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ die des Produkts,

$$|\xi_1| >> |\xi_2|,$$

dann kann die halbe Ableitung auf dem "high-frequency-factor" u_0 auf den "low-frequency-factor" v_0 hinübergezogen werden. In Raumdimensionen $n \geq 3$ gilt $(*)$ entsprechend unter der Voraussetzung $s > \frac{n-1}{2}$. (Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, Tao.) Zum Beweis benutzt man die in Kap. 1 bewiesene Darst. von $\delta(P)$ und eine dyadische Zerlegung mindestens eines der Faktoren.