2. Die semilineare Schrödingergleichung auf $\mathbb{R}^n$

Hier betrachten wir (im wesentlichen) das Cauchy-Problem

(CP) $iu_t + \Delta u = \varepsilon |u|^{p-1} u, \quad p>1, \ \varepsilon \in \{\pm 1\}, \qquad u(t=0) = u_0 \in X(\mathbb{R}^n)$

bzw. die entsprechende Integralgleichung

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + c\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \underbrace{|u(s)|^{p-1}u(s)}_{=: N(u(s))} ds ,$$

$\left(e^{it\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{it|\xi|^2} \mathcal{F} \right)$

die wir mit dem Banachschen FPS behandeln werden.

2.1 Heuristische Vorüberlegungen und ein einfaches erstes Ergebnis

Frage: Welche der in 1.2. vorgestellten Funktionenräume sind als Datenräume geeignet?

(i) Die Erhaltungsgrößen sprechen für L^2 (Masse) und H^1 (führender Term der Energie), vielleicht etwas allgemeiner für die H^s-Skala. Dieses Argument betrifft allerdings in erster Linie nur den Schluss von lokaler auf globale Wohlgestelltheit.

(ii) Wenn wir die Nichtlinearität als Störung des linearen Teils behandeln wollen und Lösungen in $C([0,T], X(\mathbb{R}^n))$ suchen ("persistence property", gehört bei Evolutionsgleichungen zu den Anforderungen bei Wohlgestelltheit), so sollte

$$e^{it\Delta} : X(\mathbb{R}^n) \to X(\mathbb{R}^n)$$

stetig sein. Dies ist auf der L^p-Skala $(1 \le p \le \infty)$ (und auf der H^s_p-Skala, bei festem s) nur für

$p = 2$ der Fall, wie die folgende einfache Überlegung zeigt

Nehmen wir an, für ein $t_0 \neq 0$ und ein $p \neq 2$ gelte

$$\| e^{it_0\Delta} u_0 \|_p \leq C(t_0) \| u_0 \|_p \quad \forall u_0 \in L^p$$

Dann gilt dies "by duality" mit $-t_0$ anstelle von t_0 für p' statt p. Also können wir $p > 2$ annehmen.

Nun haben wir bereits den "time-decay" estimate

$$\| e^{it\Delta} u_0 \|_p \lesssim |t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p})} \| u_0 \|_{p'}, \qquad (p > 2)$$

gezeigt. Damit zusammen ergibt unsere Annahme

$$\| u_0 \|_p = \| e^{it_0\Delta} e^{-it_0\Delta} u_0 \|_p \overset{\text{Annahme}}{\leq} C(t_0) \| e^{-it_0\Delta} u_0 \|_p$$

$$\overset{\text{time decay}}{\longrightarrow} \leq \tilde{C}(t_0) \| u_0 \|_{p'}, \qquad \forall u_0 \in L^p \cap L^{p'}$$

und damit die stetige Einbettung $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, was einen Widerspruch bedeutet.

Also sollten wir uns auch bei der lokalen Theorie auf L^2-basierte Räume L^2, H^s, $\dot{H}^s$, $B^s_{2,q}$ und $\dot{B}^s_{2,q}$ als Datenräume beschränken (jedenfalls zunächst.)

Bem.: (i) Dieses einfache Argument geht stets für die Lösungen von $u_t - i\varphi(-i\nabla)u = 0$, wenn φ reell und quadratisch oder höherer Ordnung ist, also insbesondere für die Airy-Gleichung (= linearer Teil von KdV). Für die Wellengleichung geht die "time-decay-Abschätzung" nur mit einem gewissen Verlust und in höheren ($n \geq 2$)

Raumdimensionen. Dann wird die Überlegung etwas kompliziertar, führt aber zum selben Ergebnis.

(ii) Das Argument greift nicht für die Transport oder eindimensionale Wellengleichung.

(iii) Es gibt durchaus fortgeschrittene Theorien jenseits der $B^s_{2,q} / \dot{B}^s_{2,q}$ - Skala. Etwa: Gewichtete L^2-basierte Normen, z.B. $L^2(\mathbb{R}^4, |x|^q dx)$, oder $\widehat{H}^s_p$ mit Norm $\|f\|_{\widehat{H}^s_p} = \|\langle\xi\rangle^s \hat{f}\|_{L^{p'}}$, oft als $\mathcal{F}L^s_{p'}$ bezeichnet. Dazu sollten aber die Möglichkeiten auf der Standard-Skala zunächst einmal ausgeschöpft sein.

Um für Daten in $H^s(\mathbb{R}^4)$ überhaupt ein erstes Ergebnis zu erhalten, müssen wir die Nichtlinearität in der H^s-Norm abschätzen können. Dazu dient:

<u>Lemma</u> 1 Für $s > \frac{4}{2}$ ist $H^s(\mathbb{R}^4)$ eine Banach-Algebra unter punktweiser Multiplikation, d.h. es gilt die Abschätzung $\|f \cdot g\|_{s,2} \lesssim \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}$

("Sobolev-multiplication law", durch Wahl einer äquivalenten Norm kann man die implizite Konstante zu $c = 1$ machen.)

<u>Bew.</u>: $\|f \cdot g\|^2_{s,2} = \int_{\mathbb{R}^4} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{f \cdot g}(\xi)|^2 d\xi$

und $|\widehat{f \cdot g}(\xi)| = (2\pi)^{-4/2} \left| \int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi - \xi_1) d\xi_1 \right|$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^4} |\hat{f}(\xi_1)| |\hat{g}(\xi - \xi_1)| d\xi_1$$

Nun ist $\xi = \xi_1 + \xi - \xi_1$ und daher (beachte $s > \frac{n}{2} > 0$!)

$\langle \xi \rangle^s \lesssim \langle \xi_1 \rangle^s + \langle \xi - \xi_1 \rangle^s$, also

$$\langle \xi \rangle^s |\widehat{f \cdot g}(\xi)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi_1 \rangle^s |\hat{f}(\xi_1)| |\hat{g}(\xi - \xi_1)| \, d\xi_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi_1)| \langle \xi - \xi_1 \rangle^s |\hat{g}(\xi - \xi_1)| \, d\xi_1$$

$$= c\left(\widehat{(J^s \tilde{f}) \cdot \tilde{g}}(\xi) + \widehat{\tilde{f} \cdot J^s \tilde{g}}(\xi) \right),$$

wenn wir $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1} |f| \mathcal{F}$ definieren. Damit

$$\|f \cdot g\|_{s,2} = \|J^s (f \cdot g)\|_2 \lesssim \|(J^s \tilde{f}) \tilde{g}\|_2 + \|\tilde{f} \cdot (J^s \tilde{g})\|_2$$

und $\|(J^s \tilde{f}) \cdot \tilde{g}\|_2 \leq \|J^s \tilde{f}\|_2 \|\tilde{g}\|_\infty \lesssim \|\tilde{f}\|_{s,2} \|\tilde{g}\|_{s,2}$ Sob. ES

$= \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}$, wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $\|f\|_{s,2}$ nur vom Betrag der Fouriertransformierten von f abhängt. Den 2. Beitrag schätzt man genauso ab. □

Hiermit können wir unter Beachtung von $\|e^{it\Delta} u_0\|_2 = \|u_0\|_2$ folgendes zeigen:

Lemma 2: Es seien $p > 1$ ganzzahlig und ungerade, $s > \frac{n}{2}$ und $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein $T = T(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ von (CP).

Bew.: Es sei $B_{R,T}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius R in $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$. Dann ist $B_{R,T}$, versehen mit der von der Norm $\|u\| := \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{s,2}$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum. R und T werden im Laufe des Beweises gewählt.

Wir setzen

$$\Lambda u(t) = e^{it\Delta}u_0 + c\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} N(u(s))\,ds$$

und schätzen ab (Konvention: "constants may change from line to line".)

$$\|\Lambda u\| \le \|u_0\|_{s,2} + c\int_0^T \|N(u(s))\|_{s,2}\,ds \quad \|e^{it\Delta}u\|_{s,2} = \|u\|_{s,2}$$

$$\underset{\text{Lemma 1}}{\le} \|u_0\|_{s,2} + CT\,\|u\|^p \underset{u\in B_{R,T}}{\le} \|u_0\|_{s,2} + CTR^p$$

Für die Differenzabschätzung beachten wir die geometrische Summenformel $a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}$ und die Tatsache, dass die H^s-Norm nicht zwischen u und $\bar{u}$ unterscheidet. Damit erhalten wir

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \le CT\,\|u-v\|\cdot\sum_{k=0}^{p-1}\|u\|^k\|v\|^{p-1-k}$$

$$\underset{u,v\in B_{R,T}}{\le} CTR^{p-1}\|u-v\|$$

Jetzt: $\|u_0\|_{s,2} = \frac{R}{2}$, also $R = 2\|u_0\|_{s,2}$ und $CTR^{p-1} = \frac{1}{2}$.

Dann ist für $u,v\in B_{R,T}$: $\|\Lambda u\|\le R$, also $\Lambda u\in B_{R,T}$ und $\|\Lambda u - \Lambda v\| \le \frac{1}{2}\|u-v\|$, also $\Lambda: B_{R,T}\to B_{R,T}$ eine Kontraktion. Der Banachsche FPS liefert die Existenz einer Lösung von (CP) $u\in B_{R,T}\subset C([0,T],H^s)$, die in $B_{R,T}$ eindeutig ist.

<u>Eindeutigkeit in $C([0,T],H^s)$</u>: Wir nehmen zwei Lösungen u und $v\in C([0,T],H^s)$ an mit $u(0)=v(0)=u_0$ und setzen $T_* := \inf\{t\in[0,T]: u(t)\neq v(t)\}$. Da u,v stetige Fkten. mit Werten in H^s sind, ist T_* wohldefiniert, positiv und es gilt $u(T_*) = v(T_*) =: u_1$. Wiederholung des Arguments führt zum Widerspruch zur Def. von T_*. □.

Diskussion:

(i) Ist $v_0 \in H^s$ mit $\|v_0\|_{s,2} \leq \|u_0\|_{s,2}$, so gibt es hierzu ebenfalls eine Lösung $v \in B_{R,T}$ mit $v(t=0) = v_0$. Für die Differenz $u-v$ erhalten wir aus obigen Rechnungen die Abschätzungen

$$\|u-v\| \leq \|u_0 - v_0\|_{s,2} + C T R^{p-1} \|u-v\| = \|u_0 - v_0\|_{s,2} + \frac{1}{2}\|u-v\|,$$

also $\|u-v\| \leq 2\, \|u_0 - v_0\|_{s,2}$. Also ist der Lösungsoperator

$$S : H^s \supset \overline{B_R(0)} \longrightarrow C([0,T], H^s),$$ Daten auf Lösungen

(mit $R = 2\|u_0\|$ und u_0 war gegeben) Lipschitz-stetig. D.h. wir haben die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten, sogar in recht starker Form, nämlich Lipschitz-stetig auf Kugeln im Datenraum. Damit sind alle Anforderungen an lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems erfüllt. <u>(LWP)</u>

(ii) Wir haben die Eindeutigkeitsaussage in $C([0,T], H^s)$ und nicht nur in einem kleineren Lösungsraum $X_{s,T} \subsetneqq C([0,T], H^s)$, d.h. unser (LWP)-Ergebnis ist <u>"unconditional"</u> (= unbedingt).

(iii) Wir haben $R = 2\|u_0\|_{s,2}$ und $T = \frac{1}{2C} R^{1-p}$ gewählt, also $T \sim \|u_0\|_{s,2}^{1-p}$. D.h.: Die (durch einmalige Anwendung des Kontraktionsarguments garantierte) Lebensdauer der Lösung (lifespan) ist eine monoton fallende Funktion der <u>Norm der Daten</u>. Diese Kontrollierbarkeit der lifespan durch $\|u_0\|_{s,2}$ dient als Ausgangspunkt für eine weitere heuristische Betrachtung:

(iv) Scaling argument und "notion of criticality"

Wir nehmen an, zu $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ gebe es eine Lösung $u \in C([0,T^*), \dot{H}^s(\mathbb{R}^n))$ der semilinearen Schrödinger-Gl.

$$iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u \qquad , \quad u(t=0) = u_0 \qquad \text{(NLS)}$$

mit endlicher Lebensdauer $T^* < \infty$. (Es gelte z.B. $\lim_{t \to T^*} \|u(t)\|_{\dot{H}^s} = \infty$, oder eine andere Katastrophe möge z.Zt. T^* eintreten.) Wir haben bereits überlegt: Dann ist u_λ, definiert durch $u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$, ebenfalls eine Lösung von (NLS), allerdings mit Anfangswert

$$u_\lambda(x,0) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x) =: u_{0,\lambda}(x)$$

Für u_λ ereignet sich die Katastrophe, wenn $\lambda^2 t = T^*$ ist, d.h. die Lebensdauer von u_λ ist $T_\lambda := \frac{T^*}{\lambda^2} \longrightarrow 0 \ (\lambda \to \infty)$

Andererseits ist (nach früheren Rechnungen)

$$\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{\frac{2}{p-1} + s - \frac{n}{2}} \|u_0\|_{\dot{H}^s} \begin{cases} \longrightarrow \infty, & \text{falls } s > \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1} =: s_c \\ = \text{const}, & \text{falls } s = s_c \\ \longrightarrow 0, & \text{"} \quad s < s_c \end{cases} \quad \lambda \to \infty$$

Also ist für $s \le s_c$ nicht mit der Kontrollierbarkeit der Lebensdauer durch die Norm der Daten zu rechnen.

s_c heißt die <u>kritische Sobolev-Regularität</u> einer nichtlinearen Wellengleichung, diese wird bestimmt durch das Verhalten der Normen bei Skalentransformationen.

Wir erwarten:

(LWP) mit Kontrolle der lifespan in $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s > s_c$,

(LWP) mit Einschränkungen (ggf. nur für kleine Daten),

falls $s = s_c$ ist, und

(IP) (= Ill-posedness) für $s < s_c$.

Für (NLS) haben wir berechnet: $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1}$, d.h.

unser $s > \frac{n}{2}$ - Ergebnis erlaubt möglicherweise Verbesserungen.

Für gKdV und gBO: → Übungen.

Bem.: • Die scaling-Heuristik kann nur in seltenen Fällen zu einem Beweis der Ill-Posedness ausgebaut werden, man benötigt dazu ein "blow-up"-result, also den Nachweis, dass in endlicher Zeit tatsächlich eine Katastrophe / Explosion eintritt.

• Es gibt weitere Obstruktionen für (LWP) außer dem scaling argument, insofern verwundert es nicht, dass Beispiele für (IP) oberhalb von s_c existieren (z.B. Cubic NLS in $H^s(\mathbb{R})$ ist (IP) für $s<0$ bei $s_c = -\frac{1}{2}$).

• Andererseits ist (mir) kein WP-Ergebnis unterhalb von s_c leicht bekannt.

(Dann wollen wir jetzt versuchen, das Ergebnis aus Lemma 2 zu verbessern in Richtung $s \to s_c$.)