1.2.2 Sobolev- und Besov-Räume

(Skalen normierter Untervektorräume von $S'(\mathbb{R}^n)$)

Bezeichnungen: • $\mathcal{F}$ oder $\wedge$: Fouriertransformation $S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$,

ggf. eingeschränkt auf einen linearen Teilraum;

Inverse: $\mathcal{F}^{-1}$, $\vee$; partielle $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_{x_k}, \mathcal{F}_t$;

- Für $x \in \mathbb{R}^n$: $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ ("Japanese Brackets");
- $\| \ \|_p$: $L^p(\mathbb{R}^n)$-Norm, $1 \le p \le \infty$, manchmal: $\| \ \|_{L^p_x}$
- Fourier-Multiplikator (oder -multiplier): Operator der Form

  $M : S'(\mathbb{R}^n) \supset X \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Mf := \mathcal{F}^{-1} m(\xi) \mathcal{F} f$

  mit einer mindestens meßbaren Funktion m.

  (Bisher: $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, ab jetzt: $f \underset{\text{i.allg.}}{\in} S'(\mathbb{R}^n)$)

Def.: Sei $s \in \mathbb{R}$. Der Fourier-Multiplikator

$$J^s : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto J^s f := \mathcal{F}^{-1} \langle \xi \rangle^s \mathcal{F} f$$

heißt der <u>Bessel-Potential-Operator der Ordnung $-s$</u>.

Für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$ erklärt man ferner

$$I^s f := \mathcal{F}^{-1} |\xi|^s \mathcal{F} f$$

I^s wird als <u>Riesz-Potential-Operator der Ordnung $-s$</u> bezeichnet.

Bem.: Die Funktion $\xi \mapsto \langle \xi \rangle^s$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dabei $s \in \mathbb{R}$ fix) ist C^∞ und von moderatem Wachstum. Daher ist die Einschränkung $J^s|_{S(\mathbb{R}^n)} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig (entscheidend ist dabei, dass man weiß, daß $S(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}$-invariant ist). Folglich ist $J^s : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ als transponierter Operator von $J^s|_{S(\mathbb{R}^n)}$ ebenfalls (linear und) stetig.

Offenbar gilt $J^s \circ J^{-s} = Id_{S'(\mathbb{R}^n)}$, d.h. J^s ist invertierbar mit stetiger Inverser. Also: $J^s : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Mit Hilfe von J^s definiert man nun eine zweiparametrige Skala normierter Untervektorräume von $S'(\mathbb{R}^n)$:

Def.: Der normierte Vektorraum

$$H_p^s := H_p^s(\mathbb{R}^n) := \{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{s,p} < \infty \}$$

mit der Norm $\|f\|_{s,p} := \|J^s f\|_p$ heißt der Bessel-Potential-Raum zu den Indizes $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$. Für $p=2$ setzt man $H^s := H^{s,2}$.

Unmittelbar aus der Definition folgt:

(1) $J^s : H_p^s \to L^p$ ist ein isometrischer Isomorphismus. (Man schreibt daher manchmal auch $H_p^s = J^{-s}L^p$ als Kurzform der Definition.) Daher ist H_p^s ein Banachraum. Für $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p < \infty$ ist H_p^s separabel (d.h. es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge) und $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Teilraum.

(2) Sei $1 \le p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ und $\varphi : H_p^s \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann ist $\varphi_0 := \varphi \circ J^{-s}$ ein stetiges lineares Funktional auf L^p:

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[r, "J^{-s}"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_0"'] & H_p^s \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Nach dem Satz über die Dualräume von L^p existiert ein $g_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ und $\| \Psi_0 \| = \| g_0 \|_{p'}$, so dass

$$\Psi_0[f] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{g_0}(x)\, dx \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Wir setzen $g := J^s g_0 \in H^{-s}_{p'}$. Dann gilt für $h \in H^s_p$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi)\, \overline{\widehat{J^s g_0}}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi) \langle \xi \rangle^s\, \overline{\hat{g}_0}(\xi)\, d\xi$$

Parseval

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^s \hat{h}(\xi)\, \overline{\hat{g}_0}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} J^s h(x)\, \overline{g_0}(x)\, dx$$

$$= \Psi_0[J^s h] = \Psi[h].$$

D.h. zu jedem $\Psi \in (H^s_p)'_{J^s}$ existiert ein $g \in H^{-s}_{p'}$ und

$$\Psi[h] = \int_{\mathbb{R}^n}{}^{r} h(x)\, {}_{J^{-s}}\overline{g}(x)\, dx \qquad (*) \qquad \forall h \in H^s_p$$

und (weil $J^s : H^s_p \to L^p$ isometrisch ist) $\| \Psi \| = \| g \|_{-s,p'}$.

(Da H^s_p invariant unter komplexer Konjugation ist, kann man $\bar{g}$ in (*) auch wieder durch g ersetzen.) In diesem Sinn können wir den (topologischen) Dualraum $(H^s_p)'$ von H^s_p mit $H^{-s}_{p'}$ identifizieren, kurz $(H^s_p)' \cong H^{-s}_{p'}$.

Dies ist von Interesse für Normabschätzungen, insbes. wenn $s < 0$ ist. Man schreibt dann

$$\| f \|_{H^s_p} = \sup_{\substack{g \in H^{-s}_{p'} \\ \|g\|_{-s,p'} \le 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, dx \right|$$

und macht sich anschließend – ggf. auf Fourierseite – über das Integral her.

Der Fall $p=2$ spielt in verschiedener Hinsicht eine besondere Rolle. Zum einen handelt es sich um einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} J^s f(x) \overline{J^s g(x)}\, dx .$$

Zum anderen steht hier der Satz von Plancherel zur Verfügung, mit dessen Hilfe verschiedene Eigenschaften von H^s (relativ) leicht einsehbar sind. Wir haben dann

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} J^s f(\xi) \overline{\mathcal{F} J^s g(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi)\, d\xi ,$$

und für $f=g$ erhalten wir das Quadrat der Norm

$$\|f\|_{s,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi .$$

Hieraus folgt:

(1) $\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s+\varepsilon,2}$ und damit $H^{s+\varepsilon} \subset H^s$ (mit einer stetigen Einbettung) für jedes $\varepsilon \geq 0$.

(2) Ist $s = k \in \mathbb{N}_0$, so haben wir

$$\langle \xi \rangle^{2k} = (1+|\xi|^2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |\xi|^{2j} \quad \text{mit}$$

$$|\xi|^{2j} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Big)^j$$

und wir können $\xi_i^2 |\hat{f}(\xi)|^2 = \Big| \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) \Big|^2$ auffassen.

In diesem Fall erhalten wir als äquivalente Norm auf

$$H^s = H^k : \|f\|_{W^{k,2}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_2^2 .$$

Bem.: Bereits in den 1930er Jahren hat der russische Mathematiker Sergei L. Sobolev Normen der Form

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \qquad (1\leq p\leq\infty,\ \Omega\subset\mathbb{R}^n \text{ offen})$$

mit sog. "schwachen Ableitungen" ∇^α (definiert durch die Regel der partiellen Integration) eingeführt und verwendet. Nach ihm sind die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev-Räume benannt. Auch die Bessel-Potential-räume (insbes. für $p=2$) werden häufig als Sobolev-Räume (oder: verallgemeinerte Sobolev-Räume) bezeichnet.

Die Aussagen in (1) und (2) gelten auch für $p\in(1,\infty)$, ihr Beweis ist aber erheblich schwieriger, man benötigt dazu den substantiellen:

<u>Multiplikatorsatz von Mikhlin</u> (1956; "multiplier Theorem"):
Sei $m\in C^k(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für ein $k\in\mathbb{N}$, $k>\frac{n}{2}$, so dass für alle $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|\leq k$ gilt

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \nabla_\xi^\alpha m(\xi)| < \infty.$$

Dann ist für jedes $p\in(1,\infty)$ der Multiplikator

$$M: L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n),\ f\mapsto Mf := \mathcal{F}^{-1} m\mathcal{F}$$

stetig.
Anwendung auf $m_1(\xi) = \langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ liefert (1). Für (2) sind die Voraussetzungen des Satzes zu überprüfen für m_2 und $\frac{1}{m_2}$, wobei $m_2(\xi) = \left|\langle\xi\rangle^{-2}\left(1+\sum_{|\alpha|\leq 2}\xi^\alpha\right)\right|^{\frac{1}{2}}$. Dann beachtet man noch, dass die Klasse M_p der stetigen

Multiplikatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Unteralgebra von $L(L^p(\mathbb{R}^n))$ ist. (82)

(Bew. des Multiplier-Theorems: Grafakos: Classical Fourier Analysis, Thm. 5.2.7)

Bem.: Aufgrund des Satzes von Plancherel gilt $M_2 = L^\infty$. Dass M_p für $p \neq 2$ echt kleiner ist, demonstrierte Charles Fefferman (Fields-Medaillist, Schüler von E.M. Stein) 1971 eindrucksvoll anhand eines Bsp.s: Für $m = \chi_{B_1(0)}$ ist der Fourier-Multiplier $M = \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F}$ im $n \geq 2$ Raum-dimensionalen in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nur dann stetig, wenn $p = 2$ ist. (C. Fefferman: The multiplier problem for the ball. Annals of Mathematics, 1971.)

(3) Der Sobolevsche Einbettungssatz für H^s:

Sei $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ für ein $s > \frac{n}{2}$. Dann ergibt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-s} \left(\langle\xi\rangle^{s} |\hat{f}(\xi)|\right) d\xi \leq C_s \cdot \|f\|_{H^s},$$

also $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma folgt $\check{\hat{f}} \overset{(*)}{=} f \in C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}$.

(Vgl. (Übungen zur) Vorlesung "Harmonische Analysis", siehe auch Grafakos, "Classical..", Prop. 2.2.17.). Damit ist auch $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\|f\|_\infty \leq \int |\hat{f}(\xi)|\,d\xi \lesssim_s \|f\|_{H^{s,2}}$.

D.h. Für $s > \frac{n}{2}$ ist $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung.

(*) nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge.

Anwendung: Gleichmäßige Konvergenz der Lösungen gegen die Daten (für $t \to 0$).

Es sei $u = e^{it\Delta} u_0$ die eindeutige Lösung der Schrödingergleichung $i u_t + \Delta u = 0$ mit Anfangswert $u(t=0) = u_0$ oder allgemeiner

$$u(t) = U_\varphi(t) u_0 = \mathcal{F}_x^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x u_0 \qquad (\varphi \text{ reell})$$

Frage: Unter welchen Voraussetzungen an u_0 und in welchem Sinn (welcher Konvergenzbegriff?) gilt $\lim_{t \to 0} u(t) = u_0$.

Folg. Sei $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

(i) $\lim_{t \to 0} U_\varphi(t) u_0 = u_0$ in H^s, d.h. $\lim_{t \to 0} \| U_\varphi(t) u_0 - u_0 \|_{s,2} = 0$

(ii) Ist zusätzlich $s > \frac{n}{2}$, so gilt $\lim_{t \to 0} U_\varphi(t) u_0(x) = u_0(x)$ mit gleichmäßiger Konvergenz.

Bew.: $\| U_\varphi(t) u_0 - u_0 \|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} | e^{it\varphi(\xi)} - 1 |^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi.$

Der Integrand geht punktweise gegen Null für $t \to 0$ und wird von $4 \cdot \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}_0(\xi)|^2$ majorisiert. Also folgt (i) aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. Hieraus ergibt sich (ii) mit dem Sobolev'schen ES:

$$\| U_\varphi(t) u_0 - u_0 \|_\infty \underset{s > \frac{n}{2}}{\lesssim_s} \| U_\varphi(t) u_0 - u_0 \|_{s,2} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

Offene (z.T.) Frage: Wann gilt punktweise Konvergenz?

Schrödinger: $n = 1$: $u_0 \in H^{1/4}$, optimal auf der H^s-Skala

$n \geq 2$: $u_0 \in H^{1/2}$, suboptimal, für $n=2$ wurde $s > 3/8$ erreicht. (Aktueller Forschungsgegenstand.)

Verallgemeinerung des Einbettungssatzes für $p \neq 2$:

Sobolev'scher ES: Es seien $s > 0$ und $1 < p < q < \infty$. Dann gelten

(1) $\quad H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, falls $s - \frac{n}{p} > 0$;

(2) $\quad H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, falls $s - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$ ist.

Bem.: (i) "$\subset$" meint hier neben der Mengeninklusion auch eine stetige Einbettung, also eine Normabschätzung der Form $\|f\|_\infty$ (bzw. $\|f\|_q$) $\lesssim_{s,n,p(,q)} \|f\|_{H^{s,p}}$. Viel mehr als diese ist im Bew. auch nicht zu zeigen, da die Räume L^q und C_0 im wesentlichen durch die Endlichkeit ihrer Normen definiert sind.

(ii) In (1) ist $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}$. Fasst man die Elemente von H_p^s als Äquivalenzklassen auf, so ist die Aussage so zu verstehen, dass es einen ausgezeichneten Vertreter in C_0 gibt.

(iii) Die Größe $s - \frac{n}{p}$ wird als "differentielle Dimension" oder "Sobolevzahl" bezeichnet. Räume gleicher Sobolevzahl verhalten sich ähnlich unter Skalentransformationen $f \mapsto f_\lambda$, def. durch $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

($\to$ Übungen)

Zum Bew.: Allgemeine Argumente:

Aufgrund der Monotonie der H^s_p-Skala bei festem p im Parameter $s>0$ können wir ohne Einschränkung $0<s<n$ annehmen (da stets $p>1$).

Die entsprechende Ungleichung ist (auch für $q=\infty$)

$$\|f\|_q \lesssim_{s,n,p,q} \|f\|_{s,p} = \|J^s f\|_p \qquad \forall f\in H^s_p$$

bzw., wenn wir f durch $J^{-s}f$ ersetzen:

$$\|J^{-s}f\|_q \lesssim_{s,n,p,q} \|f\|_p \quad \forall f\in L^p.$$

Nun schreiben wir

$$J^{-s}f = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-s}\mathcal{F}f = (2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-s})*f =: (2\pi)^{-n/2}\cdot G_s * f,$$

wobei $G_s(x) = (\mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-s})(x)$.

Die Berechnung dieser Fouriertransformierten kann man (ähnlich wie in den Übungen) zurückführen auf die Fouriertransformation Gauss'scher Funktionen. Dazu startet man mit der Definition der Γ-Funktion:

$$\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty r^{\frac{s}{2}} e^{-r}\frac{dr}{r}$$

und substituiert im zweiten Ausdruck $r = At$ mit einem $A>0$. Dann folgt

beachte: $\frac{dr}{r} = \frac{dt}{t}$

$$\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right) = A^{\frac{s}{2}}\cdot\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-At}\frac{dt}{t}$$

Wählen wir hierin $A = 1+|\xi|^2$ und stellen etwas um, erhalten wir

$$\langle\xi\rangle^{-s} = C_s \cdot \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t} \cdot e^{-|\xi|^2 t} \frac{dt}{t}$$

Inverse Fouriertransformation ergibt

$$G_s(x) = C_s \cdot \int_0^\infty t^{s/2} e^{-t} (\mathcal{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2})(x) \frac{dt}{t}$$

$$= C_s \int_0^\infty t^{\frac{s-4}{2}} \cdot e^{-t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{dt}{t} \qquad (x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$$

(Hieraus lesen wir ab: $G_s(x) > 0$ und $G_s \in C^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$)

da $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Punktweise Abschätzung:

(i) $|x| \geq 2$: Wir haben $|x| = \frac{|x|}{\sqrt{2t}} \cdot \sqrt{2t} \leq \frac{|x|^2}{4t} + t$

und (wg. $|x| \geq 2$) $t + \frac{|x|^2}{4t} \geq t + \frac{1}{t}$. Zusammen also

$\frac{|x|^2}{4t} + t \geq \frac{|x|}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}$. Damit ist für $|x| \geq 2$:

$$G_s(x) \lesssim_s \int_0^\infty t^{\frac{s-4}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2t}} \frac{dt}{t} \cdot e^{-\frac{|x|}{2}} \lesssim_s e^{-\frac{|x|}{2}}$$

(ii) $0 < |x| < 2$. Wir spalten das Integral auf in

$$G_s(x) = C_s \left(\left(\int_0^4 + \int_4^\infty \right) t^{\frac{s-4}{2}} e^{-t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{dt}{t} \right) =: C_s \left(G_s^1(x) + G_s^2(x) \right)$$

wobei $G_s^2(x) \leq \int_4^\infty e^{-t} dt \leq 1$ der harmlose Teil ist.

Im ersten Integral substituiert man $r = \frac{t}{|x|^2}$, also

$t = r|x|^2$, und erhält

$$G_s^1(x) = \int_0^{4|x|^2} (|x|^2 r)^{\frac{s-4}{2}} e^{-r|x|^2} \cdot e^{-\frac{1}{4r}} \frac{dr}{r}$$

$$= |x|^{s-4} \cdot \int_0^{4|x|^2} r^{\frac{s-4}{2}} \cdot e^{-r|x|^2} e^{-\frac{1}{4r}} \cdot \frac{dr}{r}$$

Nun schätzen wir das Integral unabhängig von $|x| \in (0,2)$ ab: (87)
Wir haben $e^{-r|x|^2} \leq 1$ und damit

$$\int_0^{4|x|^2} r^{\frac{s-n}{2}} e^{-r|x|^2} e^{-\frac{1}{4r}} \frac{dr}{r} \leq \int_0^\infty r^{\frac{s-n}{2}-1} e^{-\frac{1}{4r}} dr \leq C_{s,n},$$

denn wg. des Faktors $e^{-\frac{1}{4r}}$ geht der Integrand gegen Null, wenn $r \to 0$. Andererseits haben wir $s<n$ angenommen, so dass der Exponent bei r gerade $\frac{s-n}{2}-1<-1$ ist, so dass das uneigentliche Integral für große r konvergiert.

(iii) Zsf.: $G_s(x) \lesssim_{s,n} |x|^{s-n} \chi_{(0,2)}(|x|) + e^{-\frac{|x|}{2}} \chi_{[2,\infty)}(|x|)$

$$\lesssim_{s,n} |x|^{s-n} \cdot e^{-\frac{|x|}{4}}$$

<u>$G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$ für $s > \frac{n}{r'}$</u>: Aufgrund der punktweisen Abschätzung ist $\| G_s \|_r^r \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{(s-n)r} e^{-\frac{r|x|}{4}} dx$

$$= C \cdot \int_0^\infty \varrho^{(s-n)r+n-1} e^{-\frac{r\varrho}{4}} d\varrho < \infty, \text{ falls}$$

$$(s-n)r+n-1 > -1 \iff s \cdot r > n(r-1) \iff s > n\left(1-\frac{1}{r}\right) = \frac{n}{r'}.$$

<u>Abgesang für Teil (1)</u>: Sei $f \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ und $s > \frac{n}{p}$. Dann ist $\|f\|_\infty = \| G_s * J^s f \|_\infty \underset{(!)}{\leq} \| G_s \|_{p'} \| J^s f \|_p = C_{s,p,n} \|f\|_{s,p}$

da nach dem vorigen $G_s \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ist. Die Ungleichung $\underset{(!)}{\leq}$ ist eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung:

$$|g * h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y) h(y)| dy \leq \|g\|_{p'} \|h\|_p$$

Approximiert man g und h in $L^{p'}$ bzw. L^p durch

C_c-Funktionen (g_n) und (h_n), so ist $g_n * h_n \in C_c$ und die Ungleichung zeigt, dass $g_n * h_n \to g * h$ mit glm. Konvergenz. Daher ist $g * h$ und in unserem Fall

$$f = G_s * J^s f \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Der einfache Teil von (2): Damit ist der Fall $s - \frac{n}{p} > -\frac{n}{q}$, d.h. $s > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ gemeint. Definieren wir einen Hölder-exponenten $r \in (1, \infty)$ durch $\frac{1}{r'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, so haben wir $s > \frac{n}{r'}$ und damit $G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$, wie oben gesehen. Andererseits ist $\frac{1}{r'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{q'} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{p'}$, d.h. die Exponenten q, p, r erfüllen die Voraussetzungen der Young'schen Ungleichung

$$\| g * h \|_q \le \| g \|_r \, \| h \|_p .$$

Deren Anwendung liefert

$$\| f \|_q = \| G_s * J^s f \|_q \le \| G_s \|_r \cdot \| J^s f \|_p = C_{s,n,p,q} \cdot \| f \|_{s,p}. \quad \boxtimes$$

Diskussion: (1) Young'sche Ungleichung (wie oben angegeben). Ein Grenzfall ist $q = \infty$ und $r = p'$. Dieser folgt wie oben gesehen aus der Hölderschen Ungleichung. Der andere ist $q = p$ und $r = 1$, dieser folgt aus der Minkowski-Ungleichung für Integrale.

$$\| g * h \|_p = \left\| \int g(y)\, h(\cdot - y)\, dy \right\|_p \overset{\text{Mink.}}{\le} \int |g(y)| \, \| h(\cdot - y) \|_p \, dy$$

$$= \| g \|_1 \, \| h \|_p .$$

Jetzt Riesz-Thorin, s. Vorl. HA oder Grafakos. Den Interpolationsschritt ggf. als Übung. Alt.: Duality + Hölder. Very soon im Seminar über Faltungsabschätzungen.

(2) Für den Fall $s-\frac{n}{p}=-\frac{n}{q}$ im Teil (2) ist die Young'sche Ungleichung nicht mehr ausreichend, man benötigt stattdessen die "schwache Young'sche Ungleichung"

$$\|g*h\|_p \lesssim \|g\|_{q,\infty}\,\|h\|_r$$

($1<p,q,r<\infty$ und $\frac{1}{p'}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}$), die tatsächlich eine Verschärfung der Young-Ungleichung ist. Hierbei ist

$$\|g\|_{q,\infty} := \sup_{t>0} t\,\lambda^n\{x\in\mathbb{R}^n,\ |f(x)|>t\}^{\frac{1}{q}} \le \|g\|_q$$

eine Quasi-Norm auf $L^q_\infty(\mathbb{R}^n) := \{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ messbar $: \|f\|_{q,\infty}<\infty\}$.

Wichtigstes Element in $L^q_\infty(\mathbb{R}^n)\setminus L^q(\mathbb{R}^n)$: $g(x)=|x|^{-\frac{n}{q}}$.

Hierfür wird die "weak-Young-inequality" zur wichtigen
<u>Hardy-Littlewood-Sobolev-(HLS-)Ungleichung:</u>

Es seien $0<\lambda<n$ und $r,p\in(1,\infty)$, so dass $\frac{1}{r}-\frac{1}{p}=1-\frac{\lambda}{n}$.

Dann gilt: $\|\,|x|^{-\lambda}*g\,\|_p \lesssim_{\lambda,p,r} \|g\|_r$.

Wichtige Ungleichung, werden wir im weiteren Verlauf der Vorlesung noch brauchen.

Bew.
- Interpolation via Marcinkiewicz → s. Vorl. HA/Grafakos
- Elementare Abschätzungen → aktuelles Seminar

Für den Beweis des Sob. ES im Fall $s-\frac{n}{p}=-\frac{n}{q}$ und der Ungleichung $\|f\|_q \lesssim \|I^s f\|_p$ unter denselben Voraussetzungen sei auf den Vortrag von Herrn Adams (ebenfalls im Seminar über Faltungsabschätzungen) verwiesen.

(3) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und δ_{x_0} das in x_0 konzentrierte Dirac-Maß sowie $p \in (1,\infty)$. Für welche $s \in \mathbb{R}$ gilt $\delta_{x_0} \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$? (90)

Da $\delta_{x_0} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, kommen nur negative s in Frage.

Dann haben wir

$$\| \delta_{x_0} \|_{s,p} = \| J^s \delta_{x_0} \|_p = \| \underbrace{G_{-s}}_{>0,\text{ wir hatten } G_s \text{ nur für } s>0 \text{ untersucht}} * \delta_{x_0} \|_p = \| \tau_{x_0} G_{-s} \|_p$$

$$= \| G_{-s} \|_p \,, \text{ da } \| \; \|_p \text{ translationsinvariant ist}$$

Letzteres bleibt endlich für $-s > \frac{n}{p'}$, wie wir oben gesehen haben, also haben wir $\delta_{x_0} \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ für $s < -\frac{n}{p'}$.

(4) Anhand unserer Überlegungen zum Bew. des ES sehen wir auch leicht die Translationsinvarianz von $\| \; \|_{s,p}$ ein: Beachten wir, das Faltungen und Translation vertauschen, erhalten wir zunächst für $s<0$:

$$\| \tau_{x_0} f \|_{s,p} = \| G_{-s} * \tau_{x_0} f \|_p = \| \tau_{x_0} (G_{-s} * f) \|_p$$

$$= \| G_{-s} * f \|_p = \| f \|_{s,p} .$$

"By duality" auch für $s > 0$.

(4) Littlewood-Paley-Charakterisierung von $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$

Im Hilbertraum $H^s(\mathbb{R}^n) = H^s_2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi$$

ist es leicht möglich, ein Orthogonalsystem zu konstruieren: Man zerlegt den Grundraum $\mathbb{R}^n$ – ggf. bis auf eine λ^n-Nullmenge – disjunkt in abzählbar viele meßbare und beschränkte Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ positiven Maßes, so dass

$$\mathbb{R}^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k + N \quad \left(N \text{ Nullmenge}, \ \Sigma = \begin{array}{c}\text{disjunkte}\\ \text{Vereinigung}\end{array}\right).$$

Dann setzt man $e_k := \mathcal{F}^{-1}\chi_{A_k}$ und hat

$$\langle e_k, e_l\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}\chi_{A_k}(\xi)\chi_{A_l}(\xi)d\xi = \delta_{kl}\int_{A_k}\langle\xi\rangle^{2s}d\xi .$$

Normiert man, so entsteht ein ONS von $H^s(\mathbb{R}^n)$. (Dies ist nicht in jedem Fall vollständig)

Wählt man für diese Zerlegung Kugelschalen ($n=2$: Kreisringe; engl.: annuli) mit dyadisch wachsenden Radien, also

$$A_0 = B_1(0) ; \qquad A_k = B_{2^k}(0)\setminus B_{2^{k-1}}(0) = \{\xi\in\mathbb{R}^n : 2^{k-1}\le|\xi|<2^k\},$$

so nimmt die H^s-Norm eine besondere Gestalt an:

$$\|f\|^2_{s,2} = \int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{A_k}(\xi)\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi$$

$$\sim \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2ks}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{A_k}(\xi)|\hat{f}(\xi)|^2d\xi ,$$

da in A_k gilt $\langle\xi\rangle^{2s}\sim 2^{2ks}$ ($\sim$: nach oben und unten durch ein Vielfaches abzuschätzen).

(Manchmal schreibt man $K = 2^k$, $A_k = A_K$; dann wird der letzte Ausdruck zu

$$\sum_{K \in 2^{\mathbb{N}_0}} K^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_K}(\xi) \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \, . \,)$$

Vorteil: Die Gewichte $\langle \xi \rangle^{2s}$ werden auf den Annuli A_K auf die Größenordnung K^{2s} "eingefroren", und diese Zahlen sind oft einfacher zu händeln als die variablen Ausdrücke $\langle \xi \rangle^{2s}$. Die Zerlegung wird dyadisch gewählt, so dass die Folge der Gewichte $(K^{2s})_{K \in 2^{\mathbb{N}_0}} = (2^{2ks})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine geometrische wird, die man kontrollieren kann. (Normabschätzungen laufen oft darauf hinaus, geometrische Reihen auszurechnen oder abzuschätzen.)

Die dabei verwendeten Abbildungen

$$P_{\Delta k} : H^s \longrightarrow H^s, \quad f \longmapsto P_{\Delta k} f := \mathcal{F}^{-1} \chi_{A_k} \mathcal{F} f$$

sind in unserer Situation(*) orthogonale Projektionen im eigentlichen Sinn: Es sind

- lineare Abbildungen/Operatoren mit $P_{\Delta k}^2 = P_{\Delta k}$ und
- es gilt $R(P_{\Delta k}) \perp R(P_{\Delta j})$, falls $k \neq j$ (Orthogonalität)

Wir können sie auch darstellen als Faltungen:

$$P_{\Delta k} f = \psi_k * f \quad \text{mit} \quad \psi_k = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1} \chi_{A_k}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir die H^s-Norm einer

(*) bei Verwendung scharfer Charakteristischer Funktionen.

Funktion f schreiben als

$$\| f \|_{s,2} \approx \| \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |2^{ks} P_{\Delta k} f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|_2$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{2ks} \| P_{\Delta k} f \|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

) beide äquivalent zur definierenden Norm

Bei der Littlewood-Paley-Theorie geht es darum, eine ähnliche Situation für $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \neq 2$ herzustellen. Das ist technisch aufwändig und ich werde nur die Konstruktion erläutern und das Ergebnis angeben.

Problem: Wir haben bereits erfahren, dass der Fourier-Multiplikator $\mathcal{F}^{-1} \chi_{B_1(0)} \mathcal{F}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \neq 2$ und $n \geq 2$ NICHT stetig ist. (Fefferman's: "Multiplierproblem for the ball")

Daher muß man von der Verwendung scharfer charakteristischer Funktionen Abstand nehmen und stattdessen sog. "smooth cut-off-functions" verwenden. Dabei geht zwangsläufig die Orthogonalität im strengen Sinn verloren.

Zu den Einzelheiten: Man wählt

- Ein $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$ und
- eine rotationssymmetrische Schwartz-Funktion φ, sodass $\hat{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist mit den folgenden Eigenschaften:

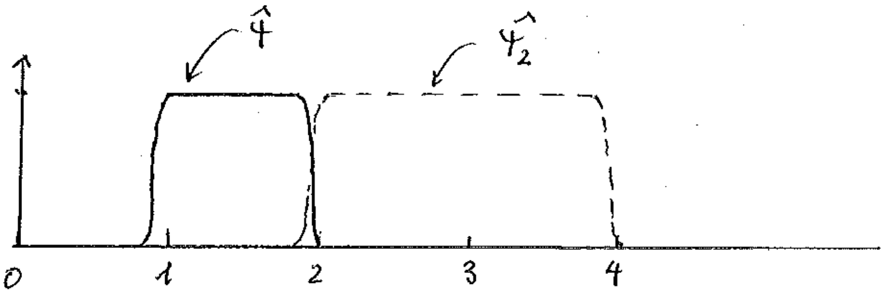
(i) $\hat{\varphi} \geq 0$

(ii) $\operatorname{supp}(\hat{\varphi}) \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : 1 - \varepsilon_0 \leq |\xi| \leq 2 \}$

(iii) $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ auf $\{ 1 \leq |\xi| \leq 2 - 2\varepsilon_0 \}$

(iv) $\hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi/2) = 1$ auf $\{ 1 \leq |\xi| \leq 4 - 4\varepsilon_0 \}$.

Skizze



Allgemein: $\hat{\psi}_j(\xi) = \hat{\psi}(2^{-j}\xi)$ (d.h. $\psi_j(x) = 2^{jn}\psi(2^j x)$), $j \in \mathbb{Z}$,

so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_j(\xi) = 1$.

Hierbei ist die Sache so eingerichtet, dass $\operatorname{supp}(\hat{\psi}_j)$ nur mit den nächsten Nachbarn $\operatorname{supp}(\hat{\psi}_{j-1})$ und $\operatorname{supp}(\hat{\psi}_{j+1})$ nichtleeren Durchschnitt hat. Das führt zu

$$\hat{\psi}_j = \hat{\psi}_j(\hat{\psi}_{j-1} + \hat{\psi}_j + \hat{\psi}_{j+1}), \qquad (*)$$

was man als "Fast-Orthogonalität" (engl.: "almost-orthogonality") im Fourierraum auffassen kann.

Ferner definieren wir

$$\hat{\phi} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\psi}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ radial}, \operatorname{supp}\hat{\phi} \subset B_1(0),$$

$$\text{so dass } \phi := \check{\hat{\phi}} \in S(\mathbb{R}^n).$$

Im x-Raum ("physical-space") wird aus der Multiplikation mit $\hat{\psi}_j$ bzw. $\hat{\phi}$ durch inverse Fouriertransformation ein Fourier-Multiplier bzw. Faltungsoperator:

$$P_{\Delta_k} f := \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}_k \mathcal{F} f = (2\pi)^{-n/2}\psi_k * f \qquad , k\in\mathbb{Z},\ f\in S'(\mathbb{R}^n)$$

$$P_0 f := \mathcal{F}^{-1}\hat{\phi}\mathcal{F} f = (2\pi)^{-n/2}\phi * f \qquad f\in S'(\mathbb{R}^n)$$

$$P_k f := \left(\sum_{j=1}^{k} P_{\Delta_j} f\right) + P_0 f \qquad f\in S'(\mathbb{R}^n),\ k\geq 0.$$

Diese werden als "Littlewood-Paley-projections" bezeichnet, obwohl es sich nur annähernd um Projektionsoperatoren handelt. Eigenschaften:

(1) Ist $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ und P einer der Operatoren aus $\{P_k, P_{\Delta_k}, k \in \mathbb{Z}\}$ so ist $Pf \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Pf sowie auch alle Ableitungen $\nabla^\alpha Pf$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, sind von moderatem Wachstum. (Grafakos, Thm. 2.3.20)

(2) Die Gleichung (*) wird zu $P_{\Delta_k} = P_{\Delta_k}(P_{\Delta_{k-1}} + P_{\Delta_k} + P_{\Delta_{k+1}})$, was an die Stelle von $P^2 = P$ für einen Projektor im strengen Sinne tritt, wird auch "almost orthogonality" genannt.

(3) Für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{\Delta_k} f^{(*)} \quad \text{bzw.} \quad f = P_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta_k} f ,$$

letzteres kann man auch als Operator-Identität

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta_k} = \mathbb{1}$$

schreiben.

Def.: Für $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ heißt $S(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |P_{\Delta_k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ die <u>Littlewood-Paley Square function</u> von f. Ferner definieren wir die Square function $\tilde{S} f = \left(|P_0 f|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |P_{\Delta_k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

(*) falls $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$ ist. Für ein Polynom bleibt die rechte Seite stets $= 0$.

Das zentrale Ergebnis bezüglich dieser Zerlegungen ist der

<u>Satz von Littlewood-Paley (I)</u>: Sei $1<p<\infty$. Dann sind auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch $\|Sf\|_p$ und $\|\tilde{S}f\|_p$ äquivalente Normen gegeben.

Bem. (1) Wird falsch für $p=1$ und $p=\infty$.

(2) Bei der Definition von S war das Funktionensystem $(\varphi_j)_j$ (und damit ϕ) nicht genau festgelegt. Hier führen verschiedene Wahlen zu äquivalenten Ausdrücken bzw. Normen.

Eine zweite Version dieses Satzes ist allgemeiner, aber auch nur etwas umständlicher zu formulieren:

<u>Satz von Littlewood-Paley (II)</u>: Sei $1<p<\infty$ und $T\in S'(\mathbb{R}^n)$.

(i) Ist $\tilde{S}T\in L^p(\mathbb{R}^n)$, so ist $T=T_f$ eine reguläre Distribution mit einem $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gibt eine Konstante $C_{p,n}$ (unabhängig von f!) so dass

$$\frac{1}{C_{p,n}}\|\tilde{S}f\|_p \le \|f\|_p \le C_{p,n}\|\tilde{S}f\|_p$$

(ii) Ist $ST\in L^p(\mathbb{R}^n)$, so existieren ein eindeutig bestimmtes $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und ein ebenfalls eindeutig bestimmtes Polynom P, so dass $T=T_{f+P}$ eine reguläre Distribution ist. Weiter existiert $C_{p,n}>0$ (unabhängig von T) so dass

$$\frac{1}{C_{p,n}}\|ST\| \le \|f\|_p \le C_{p,n}\|ST\|_p.$$

Quellen und weiterführende Diskussion: Grafakos, "Classical", Abschnitt 5.1.1
Muscalu-Schlag: Bd. I, " 8.2

Mit Hilfe des Satzes von Littlewood-Paley lässt sich wie oben zeigen, dass durch

$$|||f|||_{s,p} := \|P_0 f\|_p + \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2sk} |P_{\Delta_k} f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

eine äquivalente Norm auf $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, gegeben ist. Genauer gilt:

<u>Satz 1</u>: Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $1<p<\infty$. Dann

(i) existiert eine Konstante $c_{n,p,s}$, so dass für alle $f \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ gilt $|||f|||_{s,p} \le c_{n,p,s} \|f\|_{s,p}$;

(ii) existiert eine Konstante $d_{n,p,s}$, so dass gilt: Ist $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, so dass $|||f|||_{s,p} < \infty$, so ist $f \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\|f\|_{s,p} \le d_{n,p,s} |||f|||_{s,p}$.

Den (immerhin dreiseitigen) Beweis dieses Satzes finden Sie in:
Grafakos, "Modern", Thm. 6.2.6.

Die Littlewood-Paley-Zerlegung wird ferner dazu verwendet, um eine weitere, verwandte Skala von Funktionenräumen zu definieren, die noch über einen zusätzlichen (Fein-)Index q verfügt.

<u>Def.</u>: Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p,q \le \infty$. Dann heisst

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty \}$$

mit Norm $\|f\|_{B^s_{p,q}} := \|P_0 f\|_p + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ks\cdot q} \|P_{\Delta_k} f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}$

(mit der üblichen Modifikation für $q=\infty$) der Besov-Raum zu den Indizes s, p und q.

Grundlegende Eigenschaften der Besov-Räume $B^s_{p,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$:

Seien $s \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p, q \leq \infty$.

(1) $J^s : B^s_{p,q} \longrightarrow B^0_{p,q}$ ist ein Isomorphismus (nicht isometrisch).

(2) $B^0_{p,q}$ kann aufgefasst werden als abgeschlossener linearer Teilraum des Vektorraums $\ell^q(\mathbb{N}_0, L^p(\mathbb{R}^n))$ aller q-summierbaren Folgen mit Werten in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dieser und damit auch $B^0_{p,q}$ sowie nach (1) $B^s_{p,q}$ sind vollständig.

(3) Für $p, q < \infty$ ist $B^s_{p,q}$ separabel und $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Teilraum.

(4) Dualität: Seien $p, q < \infty$ und Ψ ein stetiges lineares Funktional auf $B^s_{p,q}$. Dann existiert ein $g \in B^{-s}_{p',q'}$ mit $\|\Psi\| = \|g\|_{B^{-s}_{p',q'}}$, so dass für alle $h \in B^s_{p,q}$ gilt

$$\Psi[h] = \int_{\mathbb{R}^n} J^s h(x) \cdot J^{-s} g(x)\, dx$$

In diesem Sinne gilt $(B^s_{p,q})' \cong B^{-s}_{p',q'}$.

Die Besovräume spielen (in dieser Vorlesung jedenfalls) als Datenräume nur in Grenzfällen kritischer Regularität eine Rolle, während man bei Rechnungen von den Normen des öfteren Gebrauch macht. Daher sollen einige Anmerkungen zu den Beweisen von (1) bis (4) hier genügen!

(1) Wg. $\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|P_0 f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{skq} \|P_{\Delta k} f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$

reicht für (1) der Nachweis von

$$\|P_0 f\|_p \sim \|J^s \tilde{P}_0 f\|_p \quad \text{und} \quad \|J^s P_{\Delta k} f\|_p \sim 2^{ks} \|\tilde{P}_{\Delta k} f\|,$$

wobei ~ ein äquivalentes System von L.P.-Projektoren (Bzgl. mit größerem Träger, etwa $\tilde{P}_{\Delta k} = P_{\Delta(k-1)} + P_{\Delta k} + P_{\Delta(k+1)}$) anzeigt.

Zu beachten ist hierbei $J^s P_{\Delta k} = P_{\Delta k} J^s$ (beides sind Fourier-multiplier). Nun reicht es, eine Ungleichung zu zeigen, wobei die implizite Konstante nicht von s abhängt,(*) danach geht man zu $-s$ über. Betrachten wir also

$$\|J^s P_{\Delta k} f\|_p = \|(J^s \psi_k) * f\|_p \leq \|J^s \psi_k\|_1 \|f\|_p \quad \left(\begin{matrix}\text{Endpunkt}\\ \text{von Young}\end{matrix}\right)$$

Nun zeigt man: Wg. $\operatorname{supp}(\hat{\psi}_k) \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \emptyset$ ist $\|J^s \psi_k\|_1 \sim \|I^s \psi_k\|_1$.

Ferner $\psi_k = 2^k \psi(2^k \cdot)$, $2^k I^s \psi_k = 2^{ks} I^s \psi(2^k \cdot)$ (Übung, Blatt 6)

und die Transformationsformel geben $\|I^s \psi_k\|_1 = 2^{ks} \|I^s \psi_0\|$

In (2)-(4) ist dann nur noch etwas für den Fall $s=0$ zu tun. Hierbei greift man (wie in (2) angedeutet) auf Ergebnisse über Räume vektorwertiger Folgen zurück, siehe z.B. Triebel, "Interpolation theory, ..." Kap. 1.18.

In (4) benutzt man, dass für $1 \leq q, p < \infty$ gilt

$$\left(\ell^q(L^p(\mu))\right)' \cong \ell^{q'}(L^{p'}(\mu)),$$

hier gilt allgemeiner $(\ell^q(A))' \cong \ell^{q'}(A')$, wenn A ein B-Raum und A' sein Dualraum ist.

(*) für $s \in [-R, R]$

Einbettungssatz für Besovräume:

Es seien $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq r, r_1, r_2 \leq \infty$, $r_1 \leq r_2$. Dann gelten:

(1) $B^{s+\varepsilon}_{p,\infty} \subset B^s_{p,1} \subset B^s_{p,r_1} \subset B^s_{p,r_2} \subset B^s_{p,\infty} \subset \dots$.

(2) $B^s_{p,2} \subset H^s_p \subset B^s_{p,p}$, falls $2 \leq p$ ($< \infty$!), und

$B^s_{p,p} \subset H^s_p \subset B^s_{p,2}$, falls ($1 <$!) $p \leq 2$,

insbes. ist $H^s = H^s_2 = B^s_{2,2}$.

(3) $B^s_{p,r} \subset C_0$, falls $s > \frac{4}{p}$.

(4) $B^s_{p,r} \subset B^0_{q,r}$, falls $s - \frac{4}{p} \geq -\frac{4}{q}$ und $p \leq q$.

Kommentar:

(1) zeigt zum einen die Monotonie der Besov-Skala (bei festem s und p) im zweiten Hölder-Exponenten, der hier mit r bezeichnet ist. Zum anderen sehen wir, dass Veränderungen in r durch eine beliebig kleine (positive) Ableitung kontrolliert werden können. Insofern handelt es sich bei r um einen Feinindex.

(2) stellt den Zsh. zwischen Besov- und Bessel-Potentialräumen her. Durch Veränderung im Feinindex kann man Besov-Normen durch Sobolev-Normen kontrollieren und umgekehrt, ohne in Regularität (s) oder Integrabilität (p) nachgeben zu müssen.

(3) und (4) können als Varianten des Sobolev'schen Einbettungssatzes aufgefasst werden. Insbes. werden wir (3) wg. der strikten Ungleichung für s als einfache Folgerung aus (1), (2) und dem ES erhalten.

Zwei Lemmata zur Vorbereitung des Beweises:

Lemma 1: Es seien $a = (a_u)_{u \in I}$ eine Folge und $1 \le r_1 \le r_2 \le \infty$.

Dann gilt $\|a\|_{\ell^{r_2}} := \left(\sum_{u \in I} |a_u|^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}} \le \left(\sum_{u \in I} |a_u|^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} = \|a\|_{\ell^{r_1}}$

Bem.: • übliche Modifikation für $r_i = \infty$.
- Als Einbettung: $\ell^{r_1}(I) \subset \ell^{r_2}(I)$
- liefert im obigen ES alle Inklusionen in (1) außer der ersten

Bew.: Da für $a = 0$ nichts zu zeigen ist, können wir o.E $\|a\|_{\ell^{r_1}} = 1$ annehmen. Dann ist $|a_u| \le 1$ $\forall u \in I$ und daher $\sum_{u \in I} |a_u|^{r_2} \underset{r_2 \ge r_1}{\le} \sum_{u \in I} a_u^{r_1} \le 1$. Also auch $\|a\|_{\ell^{r_2}} \le 1$.

Lemma 2: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$-meßbar. Man definiert die "gemischten L^p-Normen" für $1 \le p, q < \infty$ durch

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} := \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^q \, d\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

und für $p = \infty$ oder $q = \infty$ mit der üblichen Modifikation.

Dann gilt für $q \le p$ die Ungleichung

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} \le \|f\|_{L^q_\nu(L^p_\mu)}.$$

Bem.: • Unter der Voraussetzung $q \ge p$ gilt offenbar die umgekehrte Ungleichung.
- Die Ungleichung ist im wesentlichen eine Folgerung aus der Minkowski-Ungleichung für Integrale, wie der einfache Fall $q = 1$ am deutlichsten zeigt:

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^1_\nu)} = \Big\| \int_Y |f(\cdot,y)|\,d\nu(y) \Big\|_{L^p_\mu} \underset{\text{Mink.}}{\leq} \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p_\mu}\,d\nu(y)$$

$$= \|f\|_{L^1_\nu(L^p_\mu)}.$$

Bew. (allgemeiner Fall):

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \Big\| \Big(\int_Y |f(\cdot,y)|^q\,d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p_\mu}$$

$$= \big\| |f|^q \big\|^{\frac1q}_{L^{\frac{p}{q}}_\mu(L^1_\nu)} \overset{\text{Vorbem.}}{\leq} \big\| |f|^q \big\|^{\frac1q}_{L^1_\nu(L^{\frac{p}{q}}_\mu)}$$

zu beachten ist hierbei, dass $\frac{p}{q} \geq 1$!

$$= \|f\|_{L^q_\nu(L^p_\mu)}.$$

□.

Bem.: Solche gemischten L^p-Normen werden noch häufiger in der Form $L^p_t(L^q_x)$ oder $L^p_x(L^q_t)$ auftreten. Hierbei: x steht für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Ortsvariable x, t für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezüglich der Zeitvariable t.

Bew. des Einbettungssatzes:

Zu (1) ist aufgrund von Lemma 1 nur noch die erste Inklusion, also die Ungleichung

$$\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^s \|\cancel{P_{\Delta N}} Q_N f\|_p \lesssim \sup_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{s+\varepsilon} \|Q_N f\|_p$$

zu zeigen. (Hier und im folgenden: $Q_0 = P_0$, $Q_N = P_{\Delta N}$.)

Diese folgt aber aus

$$\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^s \|Q_N f\|_p \leq \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon} \sup_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{s+\varepsilon} \|Q_N f\|_p$$

$$\leq \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon}\Big) \|f\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}} \lesssim_\varepsilon \|f\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}},$$

letzteres, da die Reihe $\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon}$ eine konvergente geometrische Reihe ist.

Wir betrachten den Fall $1<p\le 2$ und starten mit der Besov-Norm

zu (2)

$$\|f\|_{B^s_{p,2}} = \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s}\|Q_N f\|_p^2\Big)^{\frac12} = \|(N^s Q_N f)_N\|_{L^2_\mu(L^p_\nu)}$$

wobei ν das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, μ das Zählmaß auf $2^{\mathbb{N}_0}$ und $p\le 2$ ist. Nach Lemma 2 gilt also

$$\|f\|_{B^s_{p,2}} \overset{(*)}{\le} \|(N^s Q_N f)_N\|_{L^p_\nu(L^2_\mu)} = \Big\|\Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s}|Q_N f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p$$

$$\underset{\text{Satz 1}}{=} |||f|||_{s,p} \underset{\text{Lemma 1}}{\overset{(*)}{\le}} \Big\|\Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{ps}|Q_N f|^p\Big)^{\frac1p}\Big\|_p$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{ps}\|Q_N f\|_p^p\Big)^{\frac1p} = \|f\|_{B^s_{p,p}}$$

Im Fall $2\le p<\infty$ hat man an den Stellen $(*)$ gerade die umgekehrte Ungleichung. Damit ist (2) gezeigt.

zu (3) Wir wählen $\varepsilon>0$ so klein, dass $s-\varepsilon>\frac{n}{p}$ ist und $\varrho=\min(p,2)$. Dann ist

$$B^s_{p,r} \underset{(1)}{\subset} B^{s-\varepsilon}_{p,1} \underset{(1)}{\subset} B^{s-\varepsilon}_{p,\varrho} \underset{(2)}{\subset} H^{s-\varepsilon}_p \underset{\text{Sob. ES.}}{\subset} C_0 .$$

zu (4):

$$\|f\|_{B^0_{q,r}} = \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|Q_N f\|_q^r\Big)^{\frac1r} = \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|\psi_N * f\|_q^r\Big)^{\frac1r} \qquad \psi_1=\Phi$$

$$= \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|\psi_N * \tilde\psi_N * f\|_q^r\Big)^{\frac1r} \quad \text{mit } \tilde\psi_N = \psi_{N-1}+\psi_N+\psi_{N+1}$$

$$\underset{\text{Young}}{\le} \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \big(\|\psi_N\|_\varrho \|\tilde\psi_N * f\|_p\big)^r\Big)^{\frac1r}; \quad \frac{1}{q'}=\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{p'},$$

also $\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}=\frac1p-\frac1q$

Nun ist $\psi_N(x) = N^4 \psi(Nx)$ und daher

$$\| \psi_N \|_{s} = N^4 \cdot \left(\int |\psi(Nx)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \qquad y = Nx,\ dx = N^{-4} dy$$

$$= N^4 N^{-\frac{4}{s}} \| \psi \|_s = N^{\frac{4}{s'}} \| \psi \|_s$$

Beachten wir $\frac{4}{s'} = \frac{4}{p} - \frac{4}{q} \leq s$, erhalten wir

$$\| f \|_{B^0_{q,r}} \lesssim \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{sr} \| \tilde{\psi}_N * f \|_p^r \right)^{\frac{1}{r}} \lesssim \| f \|_{B^s_{p,r}} . \quad \square$$

01.12.17 • Homogene Sobolev- und Besovräume

Viele relevante nichtlineare Wellengleichungen sind invariant unter Skalentransformationen der Form

$$u \mapsto u_\lambda , \quad u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\beta t) , \quad \lambda > 0.$$

Hierbei hängt der Exponent β vom Verhältnis der Ordnungen der Zeit- und x-Ableitungen im linearen Teil und der Exponent α von der Nichtlinearität ab.

Bsp.: Ist u eine Lösung der semilinearen Schrödinger-Gleichung

$$i u_t + \Delta u = |u|^{p-1} u , \qquad \text{(NLS)}$$

und $u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$, so löst u_λ ebenfalls (NLS).

Begründung / Herleitung: Bei der Anwendung der Kettenregel liefern sowohl die Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ wie auch der Laplace-Operator Δ einen Faktor λ^2. Das erklärt die Wahl $\beta = 2$. Gehen wir mit dem Ansatz

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

in (NLS) ein, so erhalten wir

$$(i\partial_t+\Delta)u_\lambda(x,t) = \lambda^{\alpha+2}((i\partial_t+\Delta)u)(\lambda x,\lambda^2 t)$$

$$\underset{(NLS)}{=} \lambda^{\alpha+2}|u(\lambda x,\lambda^2 t)|^{p-1}u(\lambda x,\lambda^2 t)$$

$$= \lambda^{\alpha+2-\alpha p}|u_\lambda(x,t)|^{p-1}u_\lambda(x,t) = |u_\lambda(x,t)|^{p-1}u_\lambda(x,t),$$

falls $\alpha+2=\alpha p \iff 2=\alpha(p-1) \iff \alpha=\frac{2}{p-1}$.

Die Normen auf H^s_p und $B^s_{p,q}$ sind für $s\neq 0$ nicht "well-behaved" unter

$$f\mapsto f_\lambda,\quad f_\lambda(x)=f(\lambda x),$$

das Problem liegt bei kleinen "Frequenzen" $|\xi|\leq 1$. Hier erweist es sich als vorteilhaft, die sogenannten homogenen Halbnormen

$$\|f\|_{\dot H^s_p} := \|I^s f\|_p \quad \text{mit } I^s=\mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$$ (Riesz-Potential-Operator der Ordnung $-s$)

und

$$|||f|||_{\dot H^s_p} := \Big\|\Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{Z}}} N^{2s}|P_{\Delta N}f|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p$$

für die verallgemeinerten Sobolevräume bzw.

$$\|f\|_{\dot B^s_{p,q}} := \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{Z}}}(N^s\|P_{\Delta N}f\|_p)^q\Big)^{\frac1q}$$

(mit $\sup_N$ anstelle von $(\sum(\ )^q)^{\frac1q}$ für $q=\infty$)

für die Besovräume zu verwenden.

Lemma 3: Für die Halbnormen $||| \cdot |||_{\dot H^s_p}$ und $\| \cdot \|_{\dot B^s_{p,q}}$ sowie $\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}$ gilt $\| f_\lambda \| = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \| f \|$.

Bem.: Für $\| \;\|_{\dot H^s_p}$ auch ohne den Zusatz $\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}$. ($\to$ Übungen)

Bew.
$$P_{\Delta N} f_\lambda(x) = \psi_N * f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_N(x-y) f(\lambda y)\, dy$$
$$= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_N\left(x - \frac{y}{\lambda}\right) f(y)\, dy \qquad y' = \lambda y,\ dy' = \lambda^n dy, \text{ anschließend Umbenennung}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} \psi_N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x - y)\right) f(y)\, dy.$$

Nun ist $\psi_N(x) = N^n \psi(Nx)$, also $\lambda^{-n}\psi_N\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \psi_{\frac{N}{\lambda}}(z)$, und wir erhalten
$$P_{\Delta N} f_\lambda(x) = \psi_{\frac{N}{\lambda}} * f(\lambda x) = P_{\Delta \frac{N}{\lambda}} f(\lambda x).$$

Damit
$$||| f_\lambda |||_{\dot H^s_p} = \Big\| \Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} N^{2s} |P_{\Delta N} f_\lambda|^2 \Big)^{\frac12} \Big\|_p$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} N^{2s} |P_{\Delta \frac{N}{\lambda}} f(\lambda x)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac1p}$$

Jetzt $M = \frac{N}{\lambda}$, $y = \lambda x$:
$$= \lambda^{-\frac{n}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{M \in 2^{\mathbb{Z}}} (\lambda M)^{2s} |P_{\Delta M} f(y)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} dy \right)^{\frac1p} = \lambda^{s-\frac{n}{p}} ||| f |||_{\dot H^s_p}$$

und entsprechend
$$||| f_\lambda |||_{\dot B^s_{p,q}} = \Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} N^{sq} \| (P_{\Delta \frac{N}{\lambda}} f)_\lambda \|_p^q \Big)^{\frac1q} = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \| f \|_{\dot B^s_{p,q}},$$

wobei der Faktor λ^s durch die Subst. $M = \frac{N}{\lambda}$ und der Faktor $\lambda^{-\frac{n}{p}}$ durch $y := \lambda x$ wie oben zustande kommt. $\square$

(Der Feinindex q in der Besov-Norm ist also irrelevant für das Verhalten der (Halb-)Normen unter scaling.)

um aus $\| \ \|_{\dot{H}^s_p}$ bzw. $\| \ \|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ Banach-Räume zu bauen, bietet sich nun das bereits bei den L^p-Räumen verwendete Standard-Verfahren an: Man fasst alle Objekte zu einer Äquivalenzklasse zusammen, deren Differenzen von der Halbnorm auf Null abgebildet werden, man könnte auch sagen: "die von der Halbnorm nicht gesehen oder nicht erkannt werden". In unserem Fall:

Objekte = temperierte Distributionen $\in S'(\mathbb{R}^n)$

$\| f \|_\bullet = 0 \iff f$ ist ein Polynom

Man setzt also $\mathcal{P} = \{ P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ P \text{ ist ein Polynom} \}$

$$Z' := S'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{P} = \{ [f] : f \in S',\ g \in [f] \iff g - f \in \mathcal{P} \}.$$

und definiert die Banachräume $(s \in \mathbb{R},\ 1 \le p, q \le \infty)$

<u>Def.</u>: $\dot{H}^s_p := \{ f \in Z' : \| f \|_{\dot{H}^s_p} < \infty \}$ und

$$\dot{B}^s_{p,q} := \{ f \in Z' : \| f \|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty \}$$

heißen die <u>homogenen</u> Sobolev- bzw. Besovräume zu den Indices s, p, q.

<u>Bem.</u>: $\dot{H}^s_p$ wird auch als Riesz-Potentialraum bezeichnet.

Man kann zur Definition dieser Räume auch anders vorgehen. Man definiert

$$Z := \{ f \in S(\mathbb{R}^n) : 0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f}) \}$$

$$= \{ f \in S(\mathbb{R}^n) : \nabla_\xi^\alpha \hat{f}(0) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \}$$

$$= \{ f \in S(\mathbb{R}^n) : \int x^\alpha f(x)\,dx = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \}$$

Dann lässt sich Z' (wie oben definiert) in der Tat mit dem top. Dualraum von Z identifizieren. Ferner kann man zeigen, dass für $1 \le p,q < \infty$ der Raum Z bzw. genauer $Z + \mathcal{P} := \{ [f] : f \in Z \}$ dicht in $\dot{H}^s_p$ bzw $\dot{B}^s_{p,q}$ liegt. Man gelangt also im wesentlichen zum selben Ergebnis, wenn man (für $p,q<\infty$!) erklärt

$$\dot{H}^s_p := \overline{Z}^{\| \ \|_{\dot{H}^s_p}} \text{ in } S' \qquad \text{und} \qquad \dot{B}^s_{p,q} := \overline{Z}^{\| \ \|_{\dot{B}^s_{p,q}}} \text{ in } S'$$

(Abschluß in S' bezüglich der angegebenen Normen.)

<u>Nun gelten entsprechend:</u>

(i) $I^s : \dot{H}^s_p \longrightarrow L^p$ bzw. $I^s : \dot{B}^s_{p,q} \longrightarrow \dot{B}^0_{p,q}$ sind Isomorphismen.

(ii) $(\dot{H}^s_p)' \cong \dot{H}^{-s}_{p'}$, $(\dot{B}^s_{p,q})' \cong \dot{B}^{-s}_{p',q'}$ $(1 \le p,q < \infty)$

(iii) Einbettungen:

(a) Bei festem $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$:

$\dot{B}^s_{p,q_1} \subset \dot{B}^s_{p,q_2}$, sofern $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$

$\dot{B}^s_{p,p_*} \subset \dot{H}^s_p \subset \dot{B}^s_{p,p^*}$, sofern $p_* = \min(p,2)$, $p^* = \max(p,2)$

und insbes. gilt $\dot{B}^s_{2,2} = \dot{H}^s$.

(b) Entsprechend zum Sobolevschen ES hat man

$\dot{H}^s_p \subset L_{p_1}$, sofern $s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p_1}$, $1 < p < p_1 < \infty$ und

$\dot{B}^s_{p,q} \subset \dot{B}^0_{p_1 q}$, " $s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p_1}$, $1 \le p < p_1 \le \infty$, $1 \le q \le \infty$.

Vorsicht: Die homogenen Räume sind <u>nicht</u> länger monoton in s. Insbes. gelten die Einbettungen in (b) tatsächlich nur bei Gleichheit der Sobolev-Zahlen.

Interpolation

In Verallgemeinerung des Satzes von Riesz-Thorin gilt der folgende

Interpolationssatz: Es seien $T_i : H^{s_i}_{p_i} \longrightarrow H^{t_i}_{r_i}$ stetige lineare Abbildungen mit Operatornormen M_i, $i \in \{0,1\}$, wobei $s_i, t_i \in \mathbb{R}$ und $1 \lneq p_i, r_i \lneq \infty$. Auf $H^{s_0}_{p_0} \cap H^{s_1}_{p_1}$ gelte $T_0 = T_1 = T$ und für ein $\Theta \in (0,1)$ mögen die Beziehungen

$$s := (1-\Theta) s_0 + \Theta s_1 \quad , \quad \frac{1}{p} := \frac{1-\Theta}{p_0} + \frac{\Theta}{p_1} \quad ;$$

$$t := (1-\Theta) t_0 + \Theta t_1 \quad ; \quad \frac{1}{r} := \frac{1-\Theta}{r_0} + \frac{\Theta}{r_1}$$

bestehen. Dann erlaubt T eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{T} : H^s_p \longrightarrow H^t_r \quad \text{mit} \quad \|\tilde{T}\| \leq C M_0^{1-\Theta} M_1^{\Theta}$$

Hierbei können $H^s_p, H^{s_i}_{p_i}, \ldots$ durch $B^s_{p,q}, B^{s_i}_{p_i,q_i}, \ldots, B^{t_i}_{r_i,\tilde{q}_i}$ ersetzt werden, wenn zusätzlich die Bedingungen

$$s_0 \neq s_1 , \quad t_0 \neq t_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\Theta}{q_0} + \frac{\Theta}{q_1} , \quad \frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1-\Theta}{\tilde{q}_0} + \frac{\Theta}{\tilde{q}_1}$$

erfüllt sind, dabei können $p_i, r_i, q_i \in [1, \infty]$ zugelassen werden.

Die Interpolationsaussage gilt ebenfalls, wenn überall die inhomogenen Räume H und B durch die homogenen $\dot{H}$ und $\dot{B}$ ersetzt werden.

Ref.: Bergh-Löfström: Interpolation spaces, Kap. 6.4
Triebel: Interpolation Theory, ..., Kap. 2.4

Bem.: (i) Durch Wahl einer geeigneten Norm auf der gesamten Skala lässt sich $c = 1$ erreichen.

(ii) Der Interpolationssatz beruht wie derjenige von Riesz-Thorin auf dem 3-Geraden-Satz bzw. auf dem dahinterstehenden Maximumprinzip für holomorphe Funktionen. Daher lässt er sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auf multilineare Abbildungen verallgemeinern. Etwas ungenau: Gilt für eine k-lineare Abbildung M, dass

$$\| M(u_1, \ldots, u_k) \|_{t_i, r_i} \le M_i \prod_{j=1}^{k} \| u_j \|_{s_{i,j}; p_{i,j}} \qquad (i \in \{0,1\})$$

$$\Longrightarrow \| M(u_1, \ldots, u_k) \|_{t,r} \le c\, M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \prod_{j=1}^{k} \| u_j \|_{s_{\theta,j}; p_{\theta,j}},$$

sofern die Interpolationsbedingungen

$$s_{\theta,j} = (1-\theta) s_{0,j} + \theta s_{1,j} \qquad \frac{1}{p_{\theta,j}} = \frac{1-\theta}{p_{0,j}} + \frac{\theta}{p_{1,j}}$$

$$t = (1-\theta) t_0 + \theta t_1 \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$$

erfüllt sind. (Desgl. für Besov- und homogene Räume.)

(iii) Was die komplexe Methode nicht leistet, ist ein Wechsel zwischen der H- und der B-Skala. Aber auch hierzu gibt es Ergebnisse, die auf der reellen Methode (Verallgemeinerung Marcinkiewicz) beruhen. Etwa:

Ref.: Bergh-Löfström und Triebel, wie oben.

$$T_i : H_p^{s_i} \to H_r^{t_i} \text{ stetig mit } \| T_i \| \le M_i$$

$$\Longrightarrow \quad \| Tf \|_{B^t_{r,q}} \le c\, M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{B^s_{p,q}}, \text{ wenn}$$

$s = (1-\theta) s_0 + \theta s_1$, $t = (1-\theta) t_0 + \theta t_1$, $q \in [1,\infty]$. p und r müssen dabei festgehalten werden.

Periodische Distributionen

Def.: Eine Distribution $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ heißt 2π-periodisch (in jede Koordinatenrichtung), falls für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\tau_{2\pi k} f = f$$

Der lineare Teilraum aller 2π-periodischen Distributionen in $S'(\mathbb{R}^n)$ wird mit $S'_\pi(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Bem.: $\tau_{2\pi k} f[\varphi] = f[\tau_{-2\pi k}\varphi] = f[\varphi(\cdot + 2\pi k)] \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Proposition 1: $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ gehört genau dann zu $S'_\pi(\mathbb{R}^n)$, wenn eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ von polynomialem Wachstum existiert, so dass

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \cdot e^{ik\cdot} \quad \text{(Konvergenz in } S'(\mathbb{R}^n))$$

Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\hat{f} = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \cdot \delta_k \quad \text{(Konvergenz in } S'(\mathbb{R}^n))$$

Bew.: Zuerst zeigen wir den Zusatz:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot} \quad \text{mit Konvergenz in } S'(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff f[\varphi] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\varphi(x)\,dx = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \check{\varphi}(k) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff \hat{f}[\varphi] = f[\hat{\varphi}] = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \varphi(k) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \delta_k[\varphi]$$

$$\iff \hat{f} = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \delta_k \quad \text{(mit Konvergenz in } S'(\mathbb{R}^n)).$$

Nun ist jede Translation $\tau_{x_0} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ stetig. Daher gilt für $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot}$ und jedes $l \in \mathbb{Z}^n$, dass

$$\tau_{2\pi l} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \underbrace{\tau_{2\pi l} e^{ik\cdot}}_{= e^{ik\cdot}} = f .$$

Also liegt ein solches f in $S'_\pi(\mathbb{R}^n)$.

Umgekehrt sei $f \in S'_\pi(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Fouriertransformierte $\hat f$ und jedes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat f[\varphi] = f[\hat\varphi] = \tau_{2\pi k} f[\hat\varphi] = f[\tau_{-2\pi k}\hat\varphi] = f[\widehat{e^{2\pi i k\cdot}\varphi}]$$

$$= \hat f[e^{2\pi i k\cdot}\varphi] = e^{2\pi i k\cdot}\hat f[\varphi],$$

d.h. $\hat f = e^{2\pi i k\cdot}\cdot\hat f$ bzw. $\hat f[(1-e^{2\pi i k\cdot})\varphi] \overset{(*)}{=} 0 \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Nun sei χ_Q eine glatte charakteristische Funktion des Würfels $Q = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$, ~~[illegible]~~ so dass $1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{Q-\cancel{2\pi}k}$. Dann reicht es zu zeigen, dass

$$\chi_Q \hat f = c_0 \cdot \delta_0$$

Dazu sei zuerst $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(0) = 0$. Dann ist

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^1 (\varphi\circ\gamma)'(t)\,dt \quad \text{für } \gamma(t) = tx,\ t\in[0,1]$$

$$= \int_0^1 x \nabla\varphi(tx)\,dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\,dt$$

$$\Rightarrow \chi_Q(x)\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (1-e^{2\pi i x_j}) \underbrace{\frac{x_j}{1-e^{2\pi i x_j}}\cdot\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(tx)\,dt\cdot\chi_Q(x)}_{=:\varphi_j \in S(\mathbb{R}^n)\ (\text{wg.}\ )}$$

Darauf können wir $\hat f$ anwenden und erhalten

$$\hat{f}[\chi_Q \varphi] = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}[(1-e^{2\pi i x_j})\varphi_j] = 0 \text{ nach } (*).$$

Nun sei $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann ist

$$\chi_Q \hat{f}[\varphi] = \chi_Q \hat{f}[\underbrace{\varphi - \varphi(0)\chi_Q}_{\in S(\mathbb{R}^n),\ =0 \text{ in } x=0}] + \chi_Q \hat{f}[\varphi(0)\cdot\chi_Q]$$

$$= \chi_Q \hat{f}[\varphi(0)\cdot\chi_Q] = \varphi(0)\cdot\hat{f}[\chi_Q^2]. \Rightarrow \text{Beh.}$$

Nun kann man Sobolev- und Besov-Räume periodischer Distributionen analog definieren, wir beschränken uns hier auf die Bessel-Potential-Räume:

Def.: Für $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$ sei

$$H_p^s(\mathbb{T}^n) := \{ f \in S_\pi'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{s,p} < \infty \}$$

mit der Norm $\|f\|_{s,p} := \| J_\pi^s f \|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$, J_π^s der Fouriermultiplikator mit $(1+|k|^2)^{s/2}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Bem.: (1) Aufgrund des Satzes von Plancherel gilt insbes.

$$\|f\|_{s,2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |\hat{f}(k)|^2.$$

(2) Der Sobolev'sche Einbettungssatz und die Aussagen des Interpolationssatzes bezüglich der H-Skala gelten ebenso. Zusätzlich hat man $H_{p_1}^s \subset H_{p_2}^s$ für $p_1 \geq p_2$ aufgrund der Kompaktheit von $\mathbb{T}^n$.

(3) Ref. zu Funktionenräumen auf $\mathbb{T}^n$: Schmeisser/Triebel: Topics in Fourier Analysis and Function spaces, Kap. 3.