## 1.2 Datenräume

### 1.2.1 Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen

Wir beginnen mit der Definition einer großen Klasse verallgemeinerter Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, den sogenannten temperierten Distributionen. Diese bilden in ihrer Gesamtheit einen topologischen Vektorraum $S'(\mathbb{R}^n)$. Mit der Einführung dieser Distributionen werden zwei Ziele verfolgt:

(i) Die im ersten Abschnitt (1.1 "Einführung") bereits formal verwendeten Operationen mit Funktionen – Faltung, Fouriertransformation und Ableitungen – erhalten einen wesentlich größeren Definitionsbereich. Die oben nur formal – also ohne Berücksichtigung von Konvergenzfragen – durchgeführten Rechnungen erhalten (nachträglich) in diesem allgemeineren Rahmen ihre Legitimation (soweit möglich).

(ii) Die für unsere Zwecke geeigneten Datenräume sind im allgemeinen normierte Untervektorräume der temperierten Distributionen (oder Äquivalenzklassen in $S'(\mathbb{R}^n)$).

Nach Laurent Schwartz[1] werden diese verallgemeinerten Funktionen in ihrer Gesamtheit aufgefasst als topologischer Dualraum (= Vektorraum aller stetigen

---

1) (1915 – 2002), Begründer der Theorie der Distributionen. Fields-Medaille 1950.

linearen Funktionale, versehen mit einer VR-Topologie) eines sehr viel kleineren Raumes unendlich oft differenzierbarer und schnell fallender Funktionen:

**Def.:** Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir die Halbnormen

$$g_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta f(x)|.$$

Der Vektorraum

$$S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : g_{\alpha,\beta}(f) < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \}$$

heißt "Schwartz-Raum", seine Elemente werden als schnell fallende oder auch als "Schwartz-Funktionen" bezeichnet.

Bem. und Bsp.:

(1) $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt} \}$ umfasst.

(2) Ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $1 \le p \le \infty$, so gilt auch $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, denn:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{2n} |f(x)|}_{<\infty, \text{ da } f \in S(\mathbb{R}^n)} \underbrace{\left( \int (1+|x|)^{-2np} dx \right)^{\frac{1}{p}}}_{<\infty}$$

(klar für $p = \infty$)

Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ und für $1 \le p < \infty$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist (man falte Treppenfunktionen mit einer approximativen Einheit aus $C_c^\infty$-Funktionen), ist auch $S(\mathbb{R}^n)$ ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ (wenn $1 \le p < \infty$).

(3) Gaussfunktionen. Darunter sollen allgemeine Funktionen der Form $g_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto g_A(x) := \exp(-\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c)$ verstanden werden mit $c \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^n$ und einer Matrix $(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die symmetrisch ist, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ (leicht verallgemeinerbar!). Hierfür gilt:

$g_A \in S(\mathbb{R}^n) \iff \operatorname{Re} A$ ist positiv definit

$g_A \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \iff \operatorname{Re} A$ ist positiv semidefinit $\wedge$ $b \in i\mathbb{R}^n$

(in eine oder mehrere Richtungen möglicherweise nicht fallend., sonst ist $g_A$ in mindestens eine Richtung schnell wachsend

(4) Ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom, so sind auch $Pf$ und $P(\nabla) f \in S(\mathbb{R}^n)$.

(5) $f, g \in S(\mathbb{R}^n) \implies f * g \in S(\mathbb{R}^n)$

(6) Nicht zu $S(\mathbb{R}^n)$ gehören z.B.:

$f(x) = e^{-|x|}$ (nicht diffbar im Nullpunkt!) und

$g(x) = (1+|x|^2)^{-N}$ für $N \in \mathbb{N}$ fest (fällt nicht schnell genug!)

$S(\mathbb{R}^n)$ kann nicht in einer Weise normiert werden, so dass ein vollständiger normierter Vektorraum, also ein Banachraum entsteht. Man kann jedoch eine Metrik auf $S(\mathbb{R}^n)$ definieren, so dass man einen vollständigen metrischen Vektorraum erhält. Diese Möglichkeit beruht auf der Abzählbarkert von $\mathbb{N}_0^{2n} = \{(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ und damit des den Raum $S(\mathbb{R}^n)$ definierenden Systems von Halbnormen. Dazu seien $\mathbb{N}_0^{2n} = \{(\alpha,\beta)_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ und $s_i = s_{(\alpha,\beta)_i}$, $i \in \mathbb{N}_0$. Dann wird durch

$$d_S(f,g) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{s_i(f-g)}{1+s_i(f-g)}$$

eine Metrik auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert, bezüglich der $S(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist. (Das ist nicht trivial, gehört aber in den Bereich FA. Dort eine Standardkonstruktion, wenn ein abzählbares Halbnormensystem vorliegt.)

Mit der Angabe der Metrik sind die grundlegenden analytischen Begriffe wie z.B. Konvergenz einer Folge in $S(\mathbb{R}^n)$ sowie Stetigkeit von Abbildungen von bzw. nach $S(\mathbb{R}^n)$ im Prinzip geklärt. Dennoch sind die folgenden Kriterien nützlich, insbes. für lineare Abbildungen:

<u>Lemma</u> 1: (i) Eine Folge $(f_k)_k$ in $S(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen $f \in S(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} s_{\alpha,\beta}(f_k - f) = 0$$

(ii) Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist stetig genau dann, wenn gilt: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ existieren endlich viele Paare $(\alpha_0,\beta_0),\dots,(\alpha_N,\beta_N)$ in $\mathbb{N}_0^{2n}$, so dass

$$s_{\alpha,\beta}(Af) \lesssim_{\alpha,\beta} \sum_{i=0}^{N} s_{\alpha_i,\beta_i}(f) \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

(iii) $(E, \| \ \|)$ Sei ein normierter Vektorraum. Eine lineare Abbildung $A: S(\mathbb{R}^n) \to E$ ist stetig genau dann, wenn endlich viele Multiindices $(\alpha_0, \beta_0), \dots, (\alpha_N, \beta_N) \in \mathbb{N}_0^{2n}$ existieren, so dass

$$\| Af \| \lesssim \sum_{i=0}^{N} g_{\alpha_i, \beta_i}(f) \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Bem.: Teil (iii) mit $(E, \| \ \|) = (\mathbb{C}, | \ |)$ können wir verwenden um zu überprüfen, ob ein lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.

Bew. von (i) und (ii) ((iii) ist einfacher als (ii)):

(i) Sei $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $S(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$0 = \lim_{k\to\infty} d_S(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{g_j(f-f_k)}{1+g_j(f-f_k)}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{g_j(f-f_k)}{1+g_j(f-f_k)} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{k\to\infty} g_j(f-f_k), \quad \text{weil } t \mapsto \frac{t}{1+t} \text{ eine stetige Umkehrfunktion besitzt.}$$

Umgekehrt gelte: $\lim_{k\to\infty} g_j(f-f_k) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $k$ so groß, dass für alle $j \in \{0, \dots, N\}$ gilt $g_j(f-f_k) < \frac{\varepsilon}{2N}$. Dann erhalten wir

$$d_S(f, f_k) = \sum_{j=0}^{N-1} 2^{-j} \frac{g_j(f-f_k)}{1+g_j(f-f_k)} + \sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j} \frac{g_j(f-f_k)}{1+g_j(f-f_k)}$$

$$< N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Sei $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear, so dass die genannte Abschätzung gelte, und $(f_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt nach (i)

$\lim_{k\to\infty} \varrho_{\alpha,\beta}(f-f_k) = 0 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^{2n}$ und somit auch

$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \varrho_{\alpha_i\beta_i}(f-f_k) = 0$. Die Abschätzung ergibt für beliebige $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$: $\lim_{k\to\infty} \varrho_{\alpha\beta}(Af - Af_k) \overset{(A \text{ lin.})}{=}$

$= \lim_{k\to\infty} \varrho_{\alpha\beta}(A(f-f_k)) = 0$. Nochmal (i) anwenden zeigt: $\lim_{k\to\infty} d_{\mathcal{S}}(Af_k, Af) = 0$ und das ist die Stetigkeit von $A$ in (einem beliebigen) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Umgekehrt sei $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig. Dann ist $A$ insbesondere stetig in $f = 0$, und d.h.: $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} < \delta$ gilt $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(Af)}{1+\varrho_j(Af)} < \varepsilon$.

Nun sei ein beliebiger Index $j_0$ vorgegeben. Dann gibt es zu $\varepsilon := 2^{-j_0-1}$ ein $\delta_0 > 0$, so dass $\forall f$ mit $d_{\mathcal{S}}(f,0) < \delta_0$ gilt: $d_{\mathcal{S}}(Af) < 2^{-j_0-1}$, also insbesondere

$$2^{-j_0} \frac{\varrho_{j_0}(Af)}{1+\varrho_{j_0}(Af)} < 2^{-j_0-1} \implies \varrho_{j_0}(Af) < \frac{1}{2}\left(1 + \varrho_{j_0}(Af)\right)$$

$$\implies \varrho_{j_0}(Af) < 1 \le \frac{2}{\delta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)},$$

letzteres für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\delta}{2} \le d_{\mathcal{S}}(f,0) < \delta$

Nun ist zunächst für diese $f$ und ein hinreichend großes $N$

$$1 \le \frac{2}{\delta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} = \frac{2}{\delta} \cdot \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} + \frac{1}{2}$$

und also

$$\varrho_{j_0}(Af) < 1 \le \frac{4}{\delta} \cdot \sum_{j=0}^{N} \varrho_j(f) \qquad \forall\, f \in S \text{ mit } \frac{\delta}{2} \le d_S(f,0) < \delta.$$

Ist nun $f \in S(\mathbb{R}^n)$ beliebig, wählt man $\lambda > 0$, so dass $\frac{\delta}{2} \le d_S(\lambda f, 0) < \delta$. Dann ist ($A$ linear und $\varrho_{j_0}$ Halbnorm!)

$$\varrho_{j_0}(Af) = \frac{1}{\lambda} \varrho_{j_0}(A\lambda f) \le \frac{1}{\lambda} \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^{N} \varrho_j(\lambda f) = \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^{N} \varrho_j(f)$$

$\square$

27.10.17

Bsp. 1

(1) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ sei definiert durch $Af(x) = x^\gamma f(x)$, hierbei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ fest. Dann gilt

$$\varrho_{\alpha,\beta}(Af) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta x^\gamma f(x)|$$

Wiederholte Anwendung der Produktregel ergibt eine Vielzahl von Termen der Art $x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f(x)$, wobei $|\alpha'| + |\beta'| \le |\alpha| + |\beta| + |\gamma| =: N$

Mit der Dreiecksungleichung also

$$\varrho_{\alpha\beta}(Af) \lesssim \sum_{|\alpha'|+|\beta'| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f(x)| = \sum_{|\alpha'|+|\beta'| \le N} \varrho_{\alpha',\beta'}(f).$$

Lemma 1 ergibt die Stetigkeit von $A$.

Folgerung: Ist $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $M_P: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ der punktweise Multiplikationsoperator, def. durch $M_P f(x) := P(x) \cdot f(x)$, so ist $M_P$ stetig.

Begründung: Dreiecksungleichung oder Rechenregeln für Grenzwerte.

(2) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Af := \nabla^\gamma f$ $(\gamma \in \mathbb{N}_0^n)$ ist

ebenfalls stetig, denn

$$s_{\alpha,\beta}(Af) = s_{\alpha,\beta}(\nabla^\gamma f) = s_{\alpha,\beta+\gamma}(f)$$

Allgemeiner ist ein Differentialoperator $P(\nabla): S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ mit einem Polynom in n Variablen auch stetig.

Da $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, ist die Fouriertransformierte für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$. Wie gesehen gilt $\widehat{\nabla^\beta f}(\xi) = i^{|\beta|} \xi^\beta \hat{f}(\xi)$. Ferner haben wir

$$\widehat{x_j f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} x_j f(x)\,dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} i \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \frac{\partial}{\partial \xi_j} i \cdot \hat{f}(\xi)$$

und also $\widehat{x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \nabla_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$. Beides zusammen gibt:

$$|\mathcal{F}(x^\alpha \nabla^\beta f)(\xi)| = |\nabla_\xi^\alpha \xi^\beta \mathcal{F}f(\xi)|.$$

Damit können wir zeigen:

<u>Satz 1</u>: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

<u>Bew.</u>: (i) $s_{00}(\mathcal{F}f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_1$ (Δs-Ungl. für Integrale)

$$\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^n |f(x)| \lesssim \sum_{|\alpha| \leq 2n} s_{\alpha,0}(f)$$

(ii) $s_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \nabla_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi)|$

$$= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\nabla^\alpha x^\beta f)(\xi)| = s_{00}(\mathcal{F}(\nabla^\alpha x^\beta f)) \lesssim \ldots$$

Vorbemerkung

$$\underset{(i)}{\lesssim} \sum_{|\gamma|\le 2n} \varrho_{\gamma,0}(D^\alpha x^\beta f) \underset{\text{wie in Bsp. (1)}}{\lesssim} \sum_{\substack{|\alpha'|+|\beta'| \\ \le |\alpha|+|\beta|+2n}} \varrho_{\alpha',\beta'}(f).$$

(iii) Damit ist gezeigt: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\mathcal{F}f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Insbesondere ist $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt die Fourier-inversionsformel[1)]

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x), \quad \text{kurz}$$

$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{F}g(-x)$. Da die Reflexion $Rf(x) = f(-x)$ offensichtlich stetig ist, ist auch $\mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ stetig. □

<u>Beispiele</u> stetiger linearer Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$:

(1) reguläre Distributionen: Es sei $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

(i) meßbar und von moderatem Wachstum, d.h. es existieren $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|g(x)| \le C \langle x \rangle^N \qquad \text{oder}$$

(ii) $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty)$.

Dann ist $T_g: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, def. durch $T_g[f] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx$, ein stetiges lineares Funktional.

Begründung: zu (i): $|T_g[f]| \le \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} |g(x)| \langle x \rangle^N |f(x)|\, dx$

---

1) vgl. Vorl. "Harmonic analysis" oder Grafakos oder sogar Forster III

$$\leq C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-(n+1)} \langle x \rangle^{N+n+1} |f(x)| dx$$

$$\leq \tilde{C} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{N+n+1} |f(x)|.$$

Letzteres ist wiederum durch eine endliche Summe von Halbnormen $g_{\alpha_i, \beta_i}(f)$ kontrollierbar, sodass Lemma 1, (iii) die Beh. ergibt.

zu (ii) Hier ist (Hölder!) $|T_g[f]| \leq \|g\|_p \cdot \|f\|_{p'}$

$$\leq C \|g\|_p \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{n+1} |f(x)|. \quad \text{(Jetzt wie in (i).)}$$

Bem.: Sind $T_{g_1}$ und $T_{g_2}$ stetige lineare Funktionale, so auch $T_{g_1} + T_{g_2} = T_{g_1+g_2}$. Insofern umfaßt Bsp. (1) auch die folgende Situation: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar, so dass gilt: $\exists R > 0$, so dass $g \cdot \chi_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und ~~$\forall |x| > R$~~ ex. $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall |x| > R \quad |g(x)| \leq C \langle x \rangle^N$.
(Zerlege $g = g \cdot \chi_{B_R(0)} + g \cdot \chi_{B_R^c(0)}$.)

(2) Es sei $\mu$ ein Borel-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass ein $N \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} d\mu(x) < \infty.$$

Dann wird durch $T_\mu[f] = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$ ebenfalls ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert, da $|T_\mu[f]| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} d\mu(x) \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^N |f(x)|$.

Bem.: In den Bsp. (1) und (2) unterscheidet man im praktischen Gebrauch nicht mehr zwischen Funktion bzw. Maß ($g$ / $\mu$) einerseits und den dadurch induzierten linearen Funktionalen ($T_g$ / $T_\mu$), was nicht selten zu Verwirrung führt. Insbes. ist die Bez. $\mu[f]$ (anstelle von $T_\mu[f]$) gebräuchlich.

Spezialfälle von (2)

(2.1) endliche Borelmaße, insbesondere Dirac-Maße

$\delta_{x_0}[f] = f(x_0)$ mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(2.2) Reihen von Dirac-Maßen z.B. der Form $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \delta_k$, sofern die Koeffizienten einer Wachstumsbedingung $|c_k| \lesssim \langle k\rangle^N$ mit einem $N\in\mathbb{N}$ genügen.

(2.3) das Lebesgue-Maß $\lambda^n$ mit $N = n+1$. Kann nach Bsp. (1) auch mit der Funktion $g \equiv 1$ identifiziert werden.

(2.4) Auf $k$-dim. Hyperflächen $S$ ($k \in \{1,\dots,n-1\}$) konzentrierte "Flächenmaße", als Funktionale der Form

$$\sigma_g[f] = \int_S f(x)\cdot g(x)\, d\sigma_x \quad \left(\begin{array}{l}\text{Integral "nach dem Flächen-}\\ \text{element } d\sigma_x = \sqrt{g(t)}\,dt\end{array}\right),$$

sofern Flächenmaß und Dichtefunktion $g$ (stetig!) der o.g. Wachstumsbedingung genügen. Hierzu zählen auch die Maße $\delta(P)$, die folgendermaßen erklärt werden: Sei $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^1$-Funktion, so dass auf

$S := \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}$ gilt: $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, so dass $|\nabla P(x)| \geq \varepsilon_0$.

Dann definiert man

$$\delta(P)[f] := \int_S \frac{f(x)}{|\nabla P(x)|}\, d\sigma_x$$

Sofern $P$ und $\sigma$ die o.g. Wachstumsbed. erfüllen, ist hierdurch eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

(Zur Bez. und dem Faktor $\frac{1}{|\nabla P(x)|}$ später mehr.)

Bei den bisherigen Beispielen haben wir von der Diff.barkeit der Schwartzfunktionen noch keinen Gebrauch gemacht. Also:

(3) $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \nabla^\gamma f(x_0)$ mit $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ fest und

$$|\nabla^\gamma f(x_0)| \leq S_{0,\gamma}(f)$$

definiert ebenfalls ein stetiges lineares Funktional.

(4) Ein eindimensionales Bsp.: Der sog. "Cauchysche Hauptwert" der Funktion $\psi(x) = \frac{1}{x}$ wird festgelegt als

$$\underbrace{P.V.\frac{1}{x}}_{=:T}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx$$

Auch hierdurch wird ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeben, denn

$$|T[f]| \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x}\, dx \right| + \int_{|x|>1} |f(x)|\, dx,$$

wobei der zweite Beitrag wie vorher durch geeignete $S_{\alpha,\beta}(f)$

abgeschätzt werden kann. Für den ersten beachten wir, dass

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(0)}{x}\,dx = 0$$ (Integrand ungerade!) und benutzen den MWS:

$$\Big|\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x}\,dx\Big| = \Big|\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx\Big| = \Big|\int_{\varepsilon<|x|<1} f'(\eta_x)\,dx\Big| \le 2\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|.$$

(5) Keine (stetigen) linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ sind:

(5.1) $T_g$ für Funktionen, die zu schnell wachsen, wie etwa

$$g(x) = e^{|x|^2} \quad \text{oder} \quad g(x) = e^{|x|},$$

(5.2) Reihen wie in (2.2), also $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \delta_k$ mit (z.B.) $c_k = e^{|k|}$!

Diese sind gar nicht für alle $f\in S(\mathbb{R}^n)$ definiert. — ENDE BSP. —

<u>Def.</u>: Den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $S'(\mathbb{R}^n)$. Seine Elemente heißen <u>temperierte</u> <u>Distributionen</u>.

(Der Zusatz "temperiert" = gemäßigt dient zur Unterscheidung von der etwas größeren Klasse der Distributionen (ohne weiteren Zusatz), das sind stetige Linearformen auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist ein lineares Funktional $T$ auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig genau dann, wenn gilt:

$\forall$ Kompakta $K\subset\mathbb{R}^n$ existieren $C_K>0$ und $N_K\in\mathbb{N}_0$, so dass $|T[f]| \le C_K \sum_{|\alpha|\le N_K} \|\nabla^\alpha f\|_\infty$ $\forall f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f)\subset K$.

Die linearen Funktionale in Bsp. (5) sind also Distributionen, aber <u>nicht</u> <u>temperiert</u>.)

## Topologie auf und Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$:

Üblicherweise wird $S'(\mathbb{R}^n)$ mit der sog. "schwach-*-Topologie" $\sigma^*$ ausgestattet, die ebenfalls mit Hilfe eines Halbnormensystems erklärt werden kann. Dazu sei $\mathcal{E} := \{M \subset S(\mathbb{R}^n) : \# M < \infty\}$. Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $M \in \mathcal{E}$ setzt man

$$\| T \|_M := \max_{f \in M} |T[f]|,$$

so dass mit $\{ \| \cdot \|_M : M \in \mathcal{E} \}$ ein – allerdings überabzählbares – System von Halbnormen entsteht. Weiter definiert man für $\varepsilon > 0$, $T_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $M \in \mathcal{E}$ die Umgebungen

$$U_{\varepsilon,M}(T_0) := \{ T \in S' : \| T - T_0 \|_M < \varepsilon \}.$$

$U \subset S'(\mathbb{R}^n)$ heißt offen, wenn $U$ eine beliebige Vereinigung solcher Umgebungen ist. Das System aller in diesem Sinn offener Mengen ist die "schwach-*-Topologie" $\sigma^*$ auf $S'(\mathbb{R}^n)$. Es handelt sich um eine Vektorraum-Topologie, d.h. Vektoraddition und skalare Multiplikation sind stetig bezüglich dieser Topologie. Wegen der Überabzählbarkeit des definierenden Halbnormensystems ist $\sigma^*$ allerdings nicht metrisierbar. Aber immerhin ist $\sigma^*$ Hausdorff'sch:

Zu $T_1, T_2 \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $T_1 \neq T_2$ existiert $f \in S(\mathbb{R}^n)$, so dass $T_1[f] \neq T_2[f]$. (Man kann sagen, dass $S(\mathbb{R}^n)$ die "Punkte" von $S'(\mathbb{R}^n)$ trennt.) Wir wählen $M = \{f\}$ und $\varepsilon := \frac{1}{2} |T_1[f] - T_2[f]|$. Dann sind $U_{\varepsilon,M}(T_1)$ und $U_{\varepsilon,M}(T_2)$ disjunkt.

Konvergenz von Folgen in $S'(\mathbb{R}^n)$ wird man folgendermaßen erklärt:

<u>Def.</u>: Eine Folge $(T_k)_k$ in $S'(\mathbb{R}^n)$ heißt in $S'(\mathbb{R}^n)$ konvergent gegen $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $M \in \mathcal{E}$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \| T_k - T \|_M = 0 .$$

Bez. und Bem.: (1). $S'-\lim_{k\to\infty} T_k = T$ oder $T_k \xrightarrow[S']{} T$.

(2) Da $M \in \mathcal{E}$ immer nur endlich viele Elemente enthält, ist die angegebene Bedingung äquivalent zu

$$\lim_{k \to \infty} T_k[f] = T[f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

(3) Aufgrund der oben angemerkten Hausdorff-Eigenschaft ist der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt.

<u>Bsp</u>: (1) Es seien $f$ und $g$ meßbare Funktionen moderaten Wachstums und $(f_k)_k$ eine Folge meßbarer Funktionen, so dass

(i) $f_k \to f$ $\lambda^n$-fast überall, (ii) $|f_k| \leq g$ $\lambda^n$-f.ü.

Die entsprechenden temperierten Distributionen seien mit $T = T_f$ und $T_k = T_{f_k}$ bezeichnet. Dann gilt

$$S'-\lim_{k \to \infty} T_k = T,$$

denn für jedes $h \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz (mit Majorante $h \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$)

$$T_k[h] = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \cdot h(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot h(x)\,dx = T[h].$$

(2) Unter einer approximativen Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $\mathbb{R}^n$ (allgemeiner: auf einer LCA-Gruppe) versteht man eine Familie integrierbarer Funktionen $K_\varepsilon$ mit drei Eigenschaften:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad \forall \varepsilon>0$ ; (ii) $\exists\, C>0 : \int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\,dx \le C$

(iii) $\forall \delta>0 : \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\,dx = 0.$

Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind solche Familien leicht herzustellen: Ist $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$, so setzt man $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$.

Sei nun $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine a.E. und $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Dann kann man aus (i) bis (iii) folgern, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x) f(x)\,dx = f(0) = \delta_0[f]$$

Betrachten wir die Distributionen $T_{K_\varepsilon}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x) f(x)\,dx$, so bedeutet dies: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{K_\varepsilon}[f] = \delta_0[f] \quad \forall f\in S(\mathbb{R}^n)$, also

$$S'\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} T_{K_\varepsilon} = \delta_0$$

oder, etwas ungenauer: $S'\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = \delta_0$.

Approximative Einheiten werden daher oft als "Dirac-Scharen" oder "Dirac-Folgen" bezeichnet. In der Physik ist es üblich, sie zur Definition der $\delta$-Distribution zu verwenden.

(3) Nun sei $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{R}$ und $P \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, so dass $\nabla P(x) \neq 0$ und, auf $\{P = 0\}$, $|\nabla P(x)|^{-1} \lesssim \langle x \rangle^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x)) f(x)\, dx = \int_{\{P(x)=0\}} f(x) \frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|} = \delta(P)[f],$$

d.h.
$$\mathcal{S}'\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon \circ P = \delta(P).$$

Zum Beweis dieser Beh. sei erinnert an den

<u>Integralsatz von Gauss</u> (= divergence Theorem): Es seien

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $C^1$-Rand[1] $\partial\Omega$ und
- $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Dann gelten:
$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) \nu_i(x)\, d\sigma_x$$

Hierbei ist $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ der äußere Normaleneinheitsvektor an $\partial\Omega$ im Punkt $x \in \partial\Omega$.

<u>Bem.</u>: (i) Ist $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, so ergibt die Summation über $i$ der obigen Formel die Standardformulierung dieses Satzes: Mit $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ hat man

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, d\sigma_x$$

Daher die Bezeichnung "Divergenzsatz", die in der englischsprachigen Literatur die allein übliche ist.

---

1) d.h. $\partial\Omega$ ist lokal als Nullstellenmenge einer $C^1$-Funktion mit nicht-verschwindendem Gradienten darstellbar.

(ii) Zur Berechnung von $\nu(x)$: Es seien $x_0 \in \partial\Omega$, $U$ eine Umgebung von $x_0$ und $P \in C^1(U, \mathbb{R})$, so dass $\nabla P(x) \neq 0$ ist $\forall x \in U$ und $\Omega \cap U = \{x \in U : P(x) < 0\}$. Dann gilt

$$\nu(x_0) = \frac{\nabla P(x_0)}{|\nabla P(x_0)|} .$$

Nun zum Beweis der Behauptung: Zuerst zeigen wir die Identität für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, nehmen also insbes. an, dass $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass auf $\operatorname{supp}(f)$ gilt: $|\nabla P(x)| \geq 2n \cdot \delta_0$. Wir zerlegen $f$ in

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

mit $f_k \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\right| \geq \delta_0$ auf $\operatorname{supp}(f_k)$ gilt.

Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x)) f_k(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\,dt\right) \cdot \frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\,dx$$

$$\text{part. Int.} \qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\,dt \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\,dx .$$

Nun ist aufgrund der Eigenschaft (ii) einer approx. Einheit $\left|\int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(t)|\,dt \leq C$ (unabh. von $\varepsilon$ und $x$) und $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\,dt = \chi_{\{P<0\}}(x)$.

also (mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz):

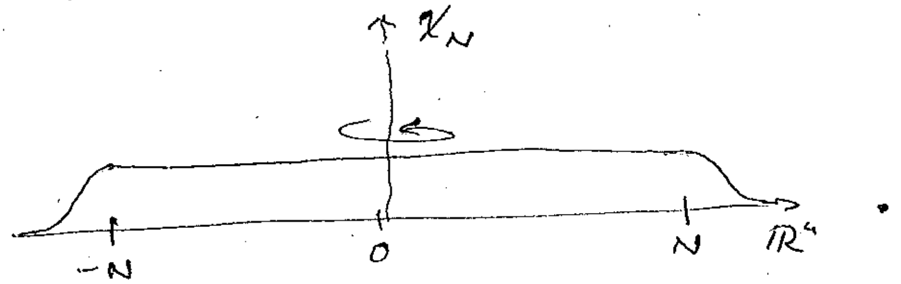
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x)) f_k(x)\,dx = \int_{\{P<0\}} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\,dx = \ldots$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} \int_{\{P=0\}} f_k(x) \cdot \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)} \cdot \nu_k(x)\, d\sigma_x$$

$$= \int_{\{P=0\}} f_k(x) \frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|}, \quad \text{da} \quad \nu_k(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}{|\nabla P(x)|}.$$

Damit ist die Identität für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gezeigt.

Nun sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f_N = f \cdot \chi_N$ mit einer glatten Abschneidefunktion ("cut-off-function") $\chi_N$




Dann gilt $\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |Q(x)(f(x)-f_N(x))| = 0$ für jede Funktion $Q$ moderaten Wachstums ($f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$!). Aufgrund der Voraussetzung $|\nabla P(x)|^{-1} \lesssim \langle x\rangle^N$ gilt dann

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{P=0\}} f_N(x) \frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|} = \int_{\{P=0\}} f(x) \frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|}\,^{2)},$$

während auf der anderen Seite bereits die glm. Konvergenz $f_N \to f$ ausreicht, um für $\delta > 0$ vorgegeben und $N$ groß genug

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(P(x))|\,|f(x)-f_N(x)|\, dx < \delta$$

zu erreichen.

Bem.: Der Fall $n=1$ in den Übungen.

---

2) Wachstum in $d\sigma_x = \sqrt{g(t)}\, d^{n-1}t$ wird stets durch $|\nabla P(x)|^{-1}$ kompensiert.

Indem wir den Gauss'schen Integralsatz wie oben verwenden, können wir auch die folgende – oft sehr nützliche – Verallgemeinerung des Satzes von Fubini beweisen:

<u>Co-area-Formel:</u> Sei $P \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so dass für $\lambda$-fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = t\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche ist*. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sei stetig und integrierbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{P=t\}} f(x) \frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|} \,.$$

<u>Bsp.:</u> (1) $P(x) = x_k \Rightarrow \nabla P(x) = 1$, $d\sigma_x = dx_1 .. dx_{k-1}\, dx_{k+1} .. dx_n$.

Dies ergibt also den Satz von Fubini.

(2) $P(x) = |x|^2 \Rightarrow \nabla P(x) = 2x$, $|\nabla P(x)| = 2|x|$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{\{|x| = \sqrt{t}\}} f(x) \frac{d\sigma_x}{2|x|}\, dt$$

subst. $\sqrt{t} = r$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2|x|}$$

$$= \int_0^\infty \int_{|x| = r} f(x)\, d\sigma_x\, dr. \qquad (\leadsto \text{Ana III ?})$$

Bew. unter der Voraussetzung $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $P \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann existieren

- $\varepsilon_0 > 0$ so dass $|\nabla P(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall x \in \operatorname{supp}(f)$
- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, so dass $a \leq P(x) \leq b \quad \forall x \in \operatorname{supp}(f)$

und $\int_{\mathbb{R}} \ldots dt$ reduziert sich auf $\int_a^b \ldots dt$.

O.E. nehmen wir an, dass für einen Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\frac{\partial P}{\partial x_j}(x) \neq 0$ ist auf $\operatorname{supp}(f)$. Dann haben wir

---

* Dies erfordert insbes. $\nabla P(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (bis auf $\lambda^n$-Nullmenge).

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{P(x)}^{b} dt\right) \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)}\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{part.}\\ \text{Int.}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{P(x)}^{b} dt\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)}\right) dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{P<t\}}(x)\, \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b \int_{\{P<t\}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)}\,dx \underset{\text{Gauss}}{=} \int_a^b \int_{\{P=t\}} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \cdot \nu_j(x)\,d\sigma_x,$$

wobei $\nu(x) = \frac{\nabla P(x)}{|\nabla P(x)|}$, also $\frac{\nu_j(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} = \frac{1}{|\nabla P(x)|}$. Also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_a^b \int_{\{P=t\}} f(x)\,\frac{d\sigma_x}{|\nabla P(x)|}$$

Allgemeinere Versionen durch z.T. aufwändige Approximationsargumente. (Evans-Gariepy: Measure theory and fine properties of functions. Abschnitt 3.4)

Wir werden verschiedene lineare Abbildungen $A: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definieren als "Transponierte" gegebener, ebenfalls linearer Abbildungen $A_0: \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Das bedeutet, wir legen $AT$ für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ durch 

$$AT[f] := T[A_0 f] \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

fest. (Später werden wir dann zumindest in der Bezeichnung nicht mehr zwischen $A$ und $A_0$ unterscheiden.) Aus dieser Definition folgt unmittelbar die Abschätzung

$$|AT[f]| = |T[A_0 f]| \leq \|T\|_{\hat{M}}$$

für jede endliche Menge $\hat{M} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, die $A_0 f$ enthält. Etwas allgemeiner für $M \in \mathcal{E}$:

$$\|AT\|_M = \max_{f \in M} |AT[f]| \leq \|T\|_{\tilde{M}}$$

für jede Menge $\hat{M} \in \mathcal{E}$ mit $A_0(M) \subset \hat{M}$. Das bedeutet: Sind $M \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wählen wir $\hat{M} = A_0(M)$ und $\delta = \varepsilon$ und erhalten $A(U_{\hat{M},\delta}(0)) \subset U_{M,\varepsilon}(0)$. Zu jeder Nullumgebung $U_{M,\varepsilon}(0)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ finden wir also mit $U_{A(M),\varepsilon}(0) = U_{\hat{M},\delta}(0)$ eine andere Nullumgebung in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$, die von $A$ in $U_{M,\varepsilon}(0)$ abgebildet wird, und das ist die Stetigkeit von $A$ im Nullpunkt. Da $A$ linear ist, ist $A$ in jedem $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ stetig.

Das gilt für jede lineare Abbildung $A$, die wie oben definiert ist, und nicht einmal die Stetigkeit von $A_0$ haben wir hierfür verwendet.

Operationen auf $S'(\mathbb{R}^n)$:

(1) Die Distributionsableitung. Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann definiert man die distributionelle Ableitung

$$\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto \nabla^\gamma T$$

durch die Regel der partiellen Integration:

$$\nabla^\gamma T[f] := (-1)^{|\gamma|} T[\underbrace{\nabla^\gamma f}_{\text{klassische Ableitung, } \hat{=} A_0}] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

Bem.: • $\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig nach der Vorbem.

• Mit diesem allgemeinen Ableitungsbegriff ist jedes $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ beliebig oft differenzierbar.

• Ist $g \in C^{|\gamma|}(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla^\gamma g$ von moderatem Wachstum, so ist $\nabla^\gamma T_g = T_{\nabla^\gamma g}$.

Bsp.: (1) $\nabla^\gamma T_{\delta_{x_0}}[f] \underset{p.I.}{=} (-1)^{|\gamma|} T_{\delta_{x_0}}[\nabla^\gamma f] = (-1)^{|\gamma|} \nabla^\gamma f(x_0)$

(2) Sei $\Theta := \chi_{(0,\infty)}$ die sog. "Heaviside'sche Sprungfunktion" auf $\mathbb{R}$. Dann ist $T_\Theta[f] = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x) f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$.

und ~~Dann ist~~ also $T_\Theta'[f] \underset{p.I.}{=} -T_\Theta[f'] = -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0)$

$= T_{\delta_0}[f]$. $\forall f \in S(\mathbb{R})$. Das heißt: $T_\Theta' = T_{\delta_0}$, was man üblicherweise abkürzt mit $\Theta' = \delta_0$

Bem.: Auch für die Distributionsableitung gilt: Ist $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla T = 0$, so ist $T$ konstant. (Das ist weniger leicht einzusehen, als man erwarten sollte. Siehe Hörmander, Thm. 3.1.4 und 3.1.4'.) Wir werden weiter unten davon Gebrauch machen.

(2) <u>Multiplikation mit einer $C^\infty$-Funktion moderaten Wachstums</u>

Sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $C>0$ und $N \in \mathbb{N}_0$ existieren, für die

$$|a(x)| \leq C \langle x \rangle^N$$

Dann ist $a \cdot \varphi$ (punktweise definiert) für jedes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ wieder in $S(\mathbb{R}^n)$ und der Multiplikator

$$M_a : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \longmapsto M_a \varphi := a \cdot \varphi$$

ist linear und stetig. Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ bilden wir das Produkt $a \cdot T$, indem wir

$$a \cdot T[\varphi] := T[a \cdot \varphi]$$

definieren. Dann ist der Multiplikationsoperator

$$M_a : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \; T \longmapsto M_a T := a \cdot T$$

linear und nach der Vorbemerkung stetig.

Nach einem Satz von Schwartz gibt es <u>keine</u> Multiplikation

$$\cdot \; S'(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n),$$

die assoziativ und kommutativ ist. Wir zeigen, dass es keine Fortsetzung der oben definierten Multiplikation mit diesen Eigenschaften gibt!

(i) Für $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ moderaten Wachstums ist $a \cdot \delta_0 = a(0)\delta_0$, denn $a \cdot \delta_0[\varphi] \underset{p.d.}{=} \delta_0[a \cdot \varphi] = a \cdot \varphi(0) = a(0) \cdot \varphi(0)$.

(ii) $x \cdot P.V.\frac{1}{x}[\varphi] = P.V.\frac{1}{x}[x\varphi] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon < |x|} \varphi(x)\,dx$

$= \int \varphi(x)\,dx = 1[\varphi]$, also $x \cdot P.V.\frac{1}{x} = 1$

Nehmen wir jetzt an, es gebe eine assoziative und kommutative Fortsetzung der oben definierten Multiplikation auf $S'(\mathbb{R}^n) \times S'(\mathbb{R}^n)$, so erhalten wir

$$0 = 0 \cdot P.V.\tfrac{1}{x} \underset{(i)}{=} (x \cdot \delta_0) \cdot P.V.\tfrac{1}{x} \underset{\text{Komm.}}{=} (\delta_0 \cdot x)(P.V.\tfrac{1}{x})$$

$$\overset{\text{Ass.}}{=} \delta_0 \cdot (x \cdot P.V.\tfrac{1}{x}) \overset{(ii)}{=} \delta_0 \cdot 1 \overset{\text{Komm.}}{=} 1 \cdot \delta_0 = \delta_0 . \text{ Also } \delta_0 = 0,$$

und das ist ein Widerspruch. □

Bem.: (1) nicht allgemein definiert ist das Produkt einer Distribution mit schneller als polynomial wachsenden oder weniger regulären Funktionen.

(2) In der Unmöglichkeit einer "vernünftigen" Multiplikation von Distributionen liegt ein wesentliches Problem für die Anwendbarkeit dieser Theorie auf nichtlineare Differenzialgln. Selbst einfache Nichtlinearitäten wie $N(u) = u^2$ sind in $S'(\mathbb{R}^n)$ nicht ohne weiteres definierbar. Soweit man diese nicht mehr punktweise definieren kann, benötigt man Abschätzungen, um sie als Fortsetzung stetiger, multilinearer Operatoren aufzufassen. In der Regel geht man zurück auf Skalen normierter linearer Teilräume von $S'(\mathbb{R}^n)$.

(3) Verkettung mit einer Affin-linearen Bijektion

Es sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Lx := Ax+b$ mit $A \in GL(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
Wie ist $T \circ L$ sinnvollerweise zu definieren? Dazu starten wir wieder mit einer regulären Distribution $T_g$ und verlangen $T_g \circ L \overset{!}{=} T_{g\circ L}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt das:

$$(T_g \circ L)[f] = T_{g\circ L}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} g(Lx)\, f(x)\, dx$$

Transformation: $y = Ax+b$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(Ax+b)\, f(x)\, dx. \qquad \rightsquigarrow x = A^{-1}(y-b) = L^{-1}(y) \rightsquigarrow dx = |\det A|^{-1} dy$$

$$= |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, f(L^{-1}y)\, dy = |\det A|^{-1}\, T_g[f \circ L^{-1}]$$

und das hat bereits eine Form, die wir als allgemeine Definition verwenden können!

**Def.** Für $L$ wie oben und $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Verkettung $T \circ L$ durch $T\circ L[f] := |\det A|^{-1}\, T[f \circ L^{-1}]$.

Bem.: (1) Ist $L$ fixiert, so ist durch $T \mapsto T\circ L$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben, denn $f \mapsto f\circ L^{-1}$ ist linear von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(2) Die Verknüpfung von $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit nichtlinearen Abbildungen $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist i.allg. nicht sinnvoll zu definieren, selbst wenn $\psi$ bijektiv ist. So macht z.B. $\delta_0(x^3)$ $(n=1)$ keinen Sinn, wie wir bei der Diskussion von $\delta(P)$ in einer Dimension in der Übung sehen werden.

(4) Faltung von $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $g \in S(\mathbb{R}^n)$

Betrachten wir zunächst den Fall einer regulären Distribution $T_h$ mit einer meßbaren Funktion $h$ moderaten Wachstums, also $|h(x)| \lesssim \langle x \rangle^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Dann können wir $g \in S(\mathbb{R}^n)$ auf herkömmliche Weise mit $h$ falten und erhalten

$$|g * h(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) h(y) dy \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y) g(y) dy \Big|$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y \rangle^N \langle y \rangle^{-N-n+1} |g(y)| \langle y \rangle^{N+n+1} dy \le C_g \langle x \rangle^N,$$

also wieder eine meßbare Funktion moderaten Wachstums, die eine reguläre Distribution $T_{g*h}$ induziert. Wenden wir diese an auf $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich mit Fubini:

$$T_{g*h}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} g * h(x) \cdot f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) h(y) f(x) dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Big( \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(x) dx \Big) h(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} Rg * f(y) \cdot h(y) dy$$

$$= T_h[Rg * f] \quad \text{mit } Rg(x) = g(-x) \quad \text{(Reflexion)}$$

Hieraus können wir eine allgemeine Definition erraten:

Def.: Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in S(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Faltung $T * g$ durch $T * g[f] = T[Rg * f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Da $f \mapsto Rg * f$, $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ (bei festem $g \in S(\mathbb{R}^n)$) eine (stetige und) lineare Abbildung ist, ist auch

$$*g : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto T * g$$

stetig und linear.

Diese Definition legt auch die Faltung von Maßen mit Schwartzfunktionen fest, sofern erstere einer Wachstumsbedingung genügen. Sei $\mu$ ein solches Maß. Dann haben wir

$$T_\mu * g\,[f] \underset{p.d.}{=} T_\mu\,[Rg * f] = \int_{\mathbb{R}^n} Rg * f(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) f(y)\, dy\; d\mu(x) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int g(y-x)\, d\mu(x)\Big) f(y)\, dy,$$

also eine reguläre Distribution, die von der Funktion

$$\mu * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, d\mu(y) \qquad (x \leftrightarrow y)$$

induziert wird.

Anwendung: Fundamentallösung des Cauchy-Problems für die Transportgleichung, d.i. für $v \in \mathbb{R}^n$ fest

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0 \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

Hierzu haben wir bereits festgestellt, dass die Lösung gegeben ist durch

$$u(x,t) = u_0(x - vt) = U_\varphi(t)\, u_0(x) \qquad \text{mit } \varphi(\xi) = -v \cdot \xi .$$

Andererseits erhalten wir für das in $v \cdot t \in \mathbb{R}^n$ konzentrierte Dirac-Maß $\delta_{vt}$:

$$\delta_{vt} * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x-y)\, d\delta_{vt}(y) = u_0(x - vt)$$

wobei zunächst $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ ist, man kann aber problemlos $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zulassen. Also ist die Fundamentallösung in diesem Fall durch eine Schar von Dirac-Maßen gegeben.

(5) Fouriertransformation

Def.: $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto \mathcal{F}T := \hat{T}$, definiert durch

$$\hat{T}[f] := T[\hat{f}] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \quad \left(\text{dabei } \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx\right)$$

heißt die Fouriertransformation temperierter Distributionen.

Hierbei handelt es sich um eine Fortsetzung der Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n)$ bzw. auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Um dies einzusehen seien $T = T_g$ mit einem $g \in L^1 \cap L^2$ und $h = \overline{\hat{g}}$. Dann gilt für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die Parseval-Gl.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{h}}(\xi)\,d\xi$$

Nun ist $\overline{h} = \hat{g}$ und $\hat{h}(\xi) = \hat{\overline{\hat{g}}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, \overline{\hat{g}}(x)\,dx$

$= (2\pi)^{-n/2} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \hat{g}(x)\,dx} = \overline{g(\xi)}$, also $\overline{\hat{h}}(\xi) = g(\xi)$ und damit

$$\hat{T_g}[f] \underset{\text{p.d.}}{=} T_g[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi)\,d\xi \underset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \hat{g}(x)\,dx$$

$$= T_{\hat{g}}[f] \qquad \text{für alle } f \in S(\mathbb{R}^n)$$

Die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als "Transponierte" der Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n)$ und somit linear und stetig. Weiter setzen wir

$$\check{T}[f] := T[\check{f}] \qquad \text{für } T \in S'(\mathbb{R}^n) \text{ und } f \in S(\mathbb{R}^n), \text{ wobei}$$

$$\check{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\,d\xi$$

die inverse Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n)$ ist.

Dann ist

$$\check{\hat{T}}[f] = \hat{T}[\check{f}] = T[\hat{\check{f}}] = T[f].$$

Das heißt, die Transformation $T \mapsto \check{T}$ ist invers zur Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{R}^n)$ und aus den gleichen Gründen ("Transponierte") linear und stetig. Damit gilt:

<u>Satz</u> 2: Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$

ist ein Isomorphismus.

Durch die Definition werden die wesentlichen Eigenschaften der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $S(\mathbb{R}^n)$ an die distributionelle Fouriertransformation weitergegeben. z.B.:

<u>Lemma</u> 2: Es seien $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gelten:

(i) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \hat{T}$ und (ii) $\widehat{\xi^\alpha T} = (i\nabla_x)^\alpha \hat{T}$.

<u>Bew.</u>: (i) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T}[f] \underset{p.d.}{=} \nabla_\xi^\alpha T[\hat{f}] \underset{p.d.}{=} (-1)^{|\alpha|} T[\nabla_\xi^\alpha \hat{f}]$

$$= i^{|\alpha|} T[\widehat{x^\alpha f}] = i^{|\alpha|} \hat{T}[x^\alpha f] = (ix)^\alpha \hat{T}[f]$$

2. Formel gilt für $f \in S(\mathbb{R}^n)$

1. Formel für $f \in S(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\widehat{\xi^\alpha T}[f] = \xi^\alpha T[\hat{f}] \underset{p.D.}{=} T[\xi^\alpha \hat{f}] = (-i)^{|\alpha|} \cdot T[\widehat{\nabla_x^\alpha f}]$

$$= (-i)^{|\alpha|} \hat{T}[\nabla_x^\alpha f] \underset{p.D.}{=} i^{|\alpha|} \nabla_x^\alpha \hat{T}[f]$$

Und schließlich haben wir auch in zwei Formulierungen

den ...

Faltungssatz: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ gelten:

(i) $\widehat{f * T} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{T}$ (ii) $\widehat{f \cdot T} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}$

Bew.: (i) ist bekannt, wenn $f$ und $T \in S(\mathbb{R}^n)$ sind. Dies benutzen wir zum Beweis von (ii): Für $g \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\widehat{f \cdot T}[g] \underset{p.D.}{=} f \cdot T[\hat{g}] \underset{p.D.}{=} T[f \cdot \hat{g}] = T[\hat{\check{f}} \cdot \hat{g}]$$

$$\underset{(i)}{=} (2\pi)^{-n/2}\, T[\widehat{\check{f} * g}] = (2\pi)^{-n/2}\, \hat{T}[R\hat{f} * g] = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}[g]$$

Damit ist (ii) gezeigt, was wir jetzt zum Beweis von (i) verwenden können: Dazu sei wieder $g \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{f * T}[g] \underset{p.D.}{=} f * T[\hat{g}] \underset{p.D}{=} T[Rf * \hat{g}] = T[\hat{\hat{f}} * \hat{g}]$$

$$\underset{(ii)}{=} (2\pi)^{n/2} \cdot T[\widehat{\hat{f} \cdot g}] \underset{p.D}{=} (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}[\hat{f} \cdot g] = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{T}[g]$$

Beispiele zur Fouriertransformation von Distributionen:

(1) Endliche Borelmaße $\mu$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Sei $T_\mu$ die hierdurch induzierte Distribution und $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\widehat{T_\mu}[f] = T_\mu[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi \quad d\mu(x)$$

$$\text{Fubini} = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\mu(x) \quad f(\xi)\, d\xi =: T_{\hat{\mu}}[f]$$

für die (glm. stetige) Funktion $\hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\mu(x)$

Speziell: $\hat{\delta}_{x_0}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\delta_{x_0}(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ix_0\xi}$

und insbes. $\hat{\delta}_0(\xi) = (2\pi)^{-n/2}$ (konstante Fkt. bzw. die davon induzierte Distribution)

Kombinieren wir das mit Lemma 2, erhalten wir

$$\widehat{\nabla_x^\alpha \delta_0}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\delta}_0(\xi) = (2\pi)^{-n/2} (i\xi)^\alpha$$

bzw. unter Vertauschung von $x \rightarrowtail\!\!\!\!\!< \xi$:

$$x^\alpha = (2\pi)^{n/2} \widehat{(-i)^{|\alpha|} \nabla_\xi^\alpha \delta_0}(x) = (2\pi)^{n/2} \widehat{(-i\nabla)^\alpha \delta_0}(x)$$

Benutzen wir die Linearität der Fouriertransformation erhalten wir für ein beliebiges Polynom $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$P(x) = (2\pi)^{n/2} \widehat{P(-i\nabla)\delta_0}(x)$$

worauf wir erneut die Fouriertransformation anwenden können. Dies ergibt

$$\hat{P} = (2\pi)^{n/2} (P(-i\nabla)\delta_0)^{\hat{\hat{}}} = (2\pi)^{n/2} P(-i\nabla)\delta_0 \circ R = (2\pi)^{n/2} P(-i\nabla)\delta_0$$

Wir können also feststellen, dass die Fouriertransformierte eines Polynoms im Nullpunkt konzentriert ist. Das kann präzisiert werden mit Hilfe des Begriffs des Trägers (support) einer Distribution:

Def.: Der Träger $\mathrm{supp}(T)$ einer Distribution $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$f \in S(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \mathrm{supp}(f) \subset A^c \implies T[f] = 0$$

z.B. ist $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$, allgemeiner $\operatorname{supp}(\sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \nabla^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$

und die Rechnung oben zeigt, dass für jedes Polynom (58)

$P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt: $\operatorname{supp}(\widehat{P}) = \{0\}$. Auch die Umkehrung

dieser Aussage ist richtig, es gilt:

(Grafakos, Prop. 2.4.1): Ist $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(T) = \{x_0\}$, so existieren $N \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $T = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \nabla^\alpha \delta_{x_0}$.

Folgerung: $P \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann ein Polynom, wenn $\operatorname{supp}(\widehat{P}) = \{0\}$ gilt.

(2) Einige eindimensionale Beispiele:

(2.1) $\hat{\theta} = ?$ für $\theta = \chi_{(0,\infty)}$. Dazu schreiben wir

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \underbrace{e^{-\varepsilon x} \chi_{(0,\infty)}(x)}_{=: \theta_\varepsilon},$$

punktw. und durch $\theta$ majorisierter limes. Die FT der Approximationen ist leicht:

$$\hat{\theta}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ix\xi - \varepsilon x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-i\xi - \varepsilon} e^{-ix\xi - \varepsilon x} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\xi + \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \frac{1}{\xi - i\varepsilon}$$

Aufgrund von Bsp. (1) zur Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$ und wegen der Stetigkeit der Fouriertransformation folgt für $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\theta}[f] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{\theta}_\varepsilon[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - i\varepsilon} f(x) dx,$$

was man häufig abkürzt mit $\hat{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \cdot \frac{1}{x - i0}$

Formale Fourierinversion ergibt

$$\Theta[f] = \check{\hat{\Theta}}[f] = \hat{\Theta}[\check{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\cdot \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{\check{f}(x)}{x-i\varepsilon}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi} f(\xi)}{x-i\varepsilon}\,d\xi\, dx$$

Bis hierher ist die Rechnung vollkommen in Ordnung. Jetzt folgen zwei Vertauschungen von Grenzprozessen!

$$\overset{?}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\,dx\right) f(\xi)\,d\xi = T_h[f]$$

mit $h(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\,dx$.

Gilt $\Theta = h$? In der Tat handelt es sich um eine „Integraldarstellung" der Heavyside-Funktion. Für $\varepsilon>0$ existieren die Integrale rechts zwar nicht als Lebesgue-Integrale, aber immerhin (Übung zu Analysis I) als uneigentliche Riemann-Integrale: $y := x\xi$, „$dx = \frac{1}{\xi}dy$" gibt

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon}\,dy \underset{\text{Residuensatz}}{\overset{\uparrow}{=}} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res}_z \frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon}$$

wobei sich die Summe über die Polstellen der betrachteten Funktion erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen. Das ist keine, wenn $\xi<0$ ist, und genau eine, wenn $\xi>0$ ist. In diesem Fall ist

$$\operatorname{res}_{i\xi\varepsilon} = \lim_{y\to i\xi\varepsilon}(y-i\xi\varepsilon)\cdot\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon} = e^{-\xi\varepsilon}$$

und also $h(\xi) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} e^{-\xi\varepsilon}\chi_{(0,\infty)}(\xi) = \Theta(\xi)$,

jedenfalls für $\xi\neq 0$.

(2.2) Betrachten wir weiter die Funktion $\Theta_-$, definiert durch

$$\Theta_-(x) = \Theta(-x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x<0 \\ 0 & \text{für } x\geq 0 \end{array} \right\} = \Theta \circ R(x),$$

wobei $R: x \mapsto -x$ die Spiegelung am Nullpunkt ist. Insbes. gilt $R^{-1}=R$. In den Übungen werden wir diskutieren, dass für invertierbare lineare Abbildungen $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\widehat{T\circ A} = |\det A|^{-1}\, \hat{T} \circ (A^{-1})^t$$

ist, im vorliegenden Fall also

$$\hat{\Theta}_- = \widehat{\Theta \circ R} = \hat{\Theta} \circ R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \cdot \frac{1}{-x-i0} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\, i} \cdot \frac{1}{x+i0}.$$

(2.3) sign-Funktion und Cauchy-Hauptwert P.V. $\frac{1}{x}$:

Wir schreiben für $x \neq 0$ $\operatorname{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta_-(x)$, so dass

$$\widehat{\operatorname{sign}} = \hat{\Theta} - \hat{\Theta}_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\left(\frac{1}{x-i0} + \frac{1}{x+i0}\right), \quad \text{genauer}$$

$$\widehat{\operatorname{sign}}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \cdot \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{1}{x-i\varepsilon} + \frac{1}{x+i\varepsilon}\right)}_{=\frac{2x}{x^2+\varepsilon^2}} f(x)\,dx \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{i} \left\{ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{0<|x|<1} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,(f(x)-f(0))\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{f(x)}{x}\,dx \right\}$$

$$\overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{i} \left\{ \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{f(x)}{x}\,dx \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{i}\, \text{P.V.}\frac{1}{x}[f].$$

(*) Denn auf $[-1,1]$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - \chi_{(\varepsilon,1]}(|x|)\right)(f(x)-f(0)) = 0$

und als Majorante haben wir nach dem Mittelwertsatz $\sup_{\xi\in[-1,1]} |f'(\xi)|$.

Also haben wir

$$\widehat{\operatorname{sign}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{i} \, P.V. \frac{1}{x} .$$

Hieraus folgt $P.V. \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot i \cdot \widehat{\operatorname{sign}}$ und weiter

$$\widehat{P.V. \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot i \cdot \widehat{\widehat{\operatorname{sign}}} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \operatorname{sign},$$

letztres, da $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist.

## 2.4 Die Hilbert-Transformation und nochmal die Benjamin-Ono-Gleichung

Für $g \in S(\mathbb{R})$ definiert man die Hilbert-Transformation als Faltung mit $\frac{1}{\pi} \cdot (P.V. \frac{1}{x})$, was man gleich punktweise angeben kann als

$$Hg(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{1}{y} g(x-y) \, dy .$$

(Man sieht leicht ein, dass $Hg \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$) Dann ist

$$Hg = \frac{1}{\pi} \cdot (P.V. \tfrac{1}{x}) * g$$

und nach dem Faltungssatz

$$\widehat{Hg}(\xi) = \frac{1}{\pi} \cdot \widehat{(P.V. \tfrac{1}{x}) * g}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \widehat{P.V. \tfrac{1}{x}}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

Der Satz von Plancherel ergibt wg. $|-i \operatorname{sign}(\xi)| = 1$

$$\| Hg \|_{L^2_x} = \| \widehat{Hg} \|_{L^2_\xi} = \| \hat{g} \|_{L^2_\xi} = \| g \|_{L^2_x} ,$$

so dass man $H$ zu einer linearen Isometrie $: L^2_x \to L^2_x$ fortsetzen kann. Wg. $\widehat{H^2 g}(\xi) = -\hat{g}(\xi)$, also $H^4 = Id$ handelt es sich um einen isometrischen Isomorphismus.

Den Pseudodifferentialoperator in der Benjamin-Ono-Gleichung

$$u_t + |D_x|\partial_x u = (u^2)_x \qquad (80)$$

hatten wir erklärt als $|D_x| = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$, also

$$-|D_x|\partial_x = \mathcal{F}^{-1} - |\xi|(i\xi)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} - i\,\mathrm{sign}(\xi)\cdot\xi^2\mathcal{F},$$

so dass wir (80) schreiben können als

$$u_t - H\partial_x^2 u = (u^2)_x$$

(2.5) Die Sokhotzki-Formeln.

Fassen wir noch einmal die Ergebnisse aus (2.1)-(2.3) zusammen:

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\cdot\frac{1}{x-i0} \ ; \ \hat{\Theta}_- = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\, i}\ \frac{1}{x+i0} \ ; \ \widehat{\mathrm{sign}} = \hat{\Theta} - \hat{\Theta}_- = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{i}\,\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}$$

andrerseits ist $1 = \Theta + \Theta_-$ und daher $\hat{\Theta} + \hat{\Theta}_- = \hat{1} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$

Addition bzw. Subtraktion ergeben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\cdot\frac{1}{x-i0} = \hat{\Theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\cdot\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\cdot\frac{-1}{x+i0} = \hat{\Theta}_- = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\,\mathrm{P.V.}\frac{1}{x}$$

Oder, nach Multiplikation mit $\pm\sqrt{2\pi}\, i$:

$$\boxed{\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta_0 + \mathrm{P.V.}\frac{1}{x} \ ; \ \frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta_0 + \mathrm{P.V.}\frac{1}{x}}$$

Diese werden als Sokhotzki-Identitäten bezeichnet.

(3) Die Fouriertransformation Gauss'scher Funktionen

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine symmetrische ($a_{ij} = a_{ji}$) und invertierbare Matrix. Wir setzen $A_0 = \mathrm{Re}\, A = (\mathrm{Re}\, a_{ij})$ und $A_1 = \mathrm{Im}\, A$, so dass $A = A_0 + i A_1$, $A_{0,1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Unter einer Gaussfunktion sei hier (der spezielle Fall)

$$g_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto g_A(x) := \exp(-\langle x, Ax\rangle /2)$$

(ohne linearen oder konstanten Term im Argument von exp) verstanden. Wir setzen stets voraus, dass

$$A_0 \text{ positiv semidefinit ist} \Longrightarrow g_A \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Wenn $A_0$ positiv definit ist, gilt sogar $g_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Um die Fouriertransformierten solcher Gaussfunktionen bestimmen zu können, sind einige Integrale vorbereitend zu berechnen:

(i) $\quad I_n := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}\, dx = (2\pi)^{n/2}$

Begründung: Für $n=2$ hat man mit Polarkoordinaten

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2/2}\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} r\, e^{-r^2/2}\, dr\, d\varphi = 2\pi.$$

Der allgemeine Fall folgt jetzt aus dem Satz von Fubini.

(Eine alternative Herleitung mit Hilfe der Coarea-Formel stellt zugleich die Beziehung her zur Oberfläche der Einheitskugel. Siehe Übungen zur harmonischen Analysis.)

(ii) Es seien $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\tau > 0$ und

$$I(\tau) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau x^2/2}\,dx\,.$$

Dann gilt $I(\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}$. ($\sqrt{\ }$ bezeichnet den auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ definierten Hauptzweig der Wurzel.)

Begründung: Wg. $\operatorname{Re}\tau > 0$ lässt sich die Ableitung von $I(\tau)$ unter dem Integral mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatz rechtfertigen. Damit erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau}\sqrt{\tau}\, I(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} I(\tau) + \sqrt{\tau}\cdot\frac{d}{d\tau} I(\tau) \qquad \text{mit}$$

$$\frac{d}{d\tau} I(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial\tau} e^{-\tau\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\tau x^2/2} x^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{x\cdot e^{-\tau\frac{x^2}{2}}}_{=f'(x) \text{ für } f(x) = \frac{1}{-\tau} e^{-\tau x^2/2}} \cdot x\,dx \underset{\text{Int.}}{\overset{\text{part.}}{=}} -\frac{1}{2\tau}\int_{\mathbb{R}} e^{-\tau x^2/2}\,dx = -\frac{1}{2\tau} I(\tau)$$

Insgesamt also $\frac{d}{d\tau}\sqrt{\tau}\, I(\tau) = 0$ und damit

$$\sqrt{\tau}\cdot I(\tau) = 1\cdot I(1) \underset{(i)}{=} \sqrt{2\pi}$$

Division durch $\sqrt{\tau}$ ergibt die Behauptung.

~~(iii) Nun sei A wie oben vorausgesetzt mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Wir setzen zusätzlich voraus, dass $A_0$ positiv definit ist, so dass $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ für alle Eigenwerte $\lambda_j$ von A gilt. Weiter führen wir die Beziehung~~

(iii) Nun sei

$$H := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A \text{ symmetrisch und } \operatorname{Re} A \text{ positiv definiert}\}$$

und $\det^{1/2}(A) := \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$ sind und $\sqrt{\ }$ den auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ definierten Hauptzweig der Wurzel bezeichnet. Dann ist

$$(\det^{1/2}(A))^2 = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det(A)$$

und

$$\det^{1/2} : H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad A \longmapsto \det^{1/2}(A)$$

ist eine stetige Funktion.

Ist ferner $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definiert, so

gilt $$\det^{1/2}(AB) = \det^{1/2}(A)\sqrt{\det B} \qquad \forall A \in H.$$

Begründung: Wir haben $(\det^{1/2}(AB))^2 = \det(AB) = \det A \cdot \det B$
$= (\det^{1/2}(A))^2 \cdot \det(B)$ und also

$$\det^{1/2}(AB) = \pm \det^{1/2}(A) \cdot \sqrt{\det B} \quad (*)$$

Nun ist die Abbildung (bei festem $B$)

$$A \longmapsto \frac{\det^{1/2}(AB)}{\det^{1/2}(A)}, \quad H \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig und also gilt in $(*)$ für alle $A \in H$ dasselbe Vz.
Für $A = \mathbb{1}$ (Einheitsmatrix) sehen wir, dass dieses das $+$-Zeichen sein muß.

Beh.: Für $A \in H$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle/2}\, dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det^{1/2}(A)}$$

Bew.: Sei $A = A_0 + iA_1$, $A_0$ positiv definit. Dann existiert eine (eindeutig bestimmte) positiv definite symmetrische Matrix $\sqrt{A_0}$ mit $(\sqrt{A_0})^2 = A_0$ und $\det A_0 = (\det(\sqrt{A_0}))^2$.

Dann schreiben wir

$$A = A_0 + iA_1 = \sqrt{A_0}\,(1 + i\,\sqrt{A_0}^{-1} A_1 \sqrt{A_0}^{-1})\,\sqrt{A_0}$$

und die hierin enthaltene Matrix $\hat{A} := \sqrt{A_0}^{-1} A_1 \sqrt{A_0}^{-1}$ ist reell und symmetrisch. Also existieren eine orthogonale Matrix $O$ und eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit den Eigenwerten von $\hat{A}$ als Diagonalelementen, so dass $\hat{A} = O^T D O$ und weiter

$$A = \sqrt{A_0}\; O^T (1 + iD)\, O \,\sqrt{A_0}$$

Dann ist nach der Vorbem.

$$\det{}^{1/2}(A) = \det(\sqrt{A_0}) \cdot \det{}^{1/2}(1 + iD)$$

$$= \det(\sqrt{A_0}) \cdot \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + i d_j}\,.$$

Damit ist alles zurechtgelegt. Wir erhalten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle x, \sqrt{A_0}\, O^T(1+iD)O\sqrt{A_0}\, x\rangle/2)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle O\sqrt{A_0}\,x, (1+iD)\,O\sqrt{A_0}\,x\rangle/2)\,dx \qquad \begin{array}{l} y = O\sqrt{A_0}\,x \\ dx = \frac{dy}{\det\sqrt{A_0}} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\det\sqrt{A_0}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle y, (1+iD)y\rangle/2)\,dy$$

$$= \frac{1}{\det\sqrt{A_0}} \cdot \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-(1+id_j)\cdot\frac{t^2}{2}\right)dt \underset{(ii)}{=} \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det\sqrt{A_0}} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+id_j}}$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det^{1/2}(A)}, \text{ wie behauptet.}$$

Bem.: Für den Hauptzweig der komplexen $\sqrt{\ }$ gilt

$$\sqrt{r\cdot e^{i\varphi}} = \sqrt{r}\cdot e^{i\varphi/2}, \quad \text{sofern } r>0 \text{ und } -\pi<\varphi<\pi.$$

Hieraus folgt
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \sqrt{\varepsilon + i\lambda} = \begin{cases} \sqrt{\lambda}\, e^{i\pi/4} & \lambda > 0 \\ 0 & \lambda = 0 \\ \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{=\sqrt{|\lambda|}\,!} \cdot e^{-i\pi/4} & \lambda < 0 \end{cases}$$

Sei nun $A_\varepsilon = \varepsilon\mathbb{1} + iA_1 = U(\varepsilon\mathbb{1} + iD)U^T$ und $A_1$ reell, symmetrisch, invertierbar, so dass alle Diagonalelemente von $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ von Null verschieden sind. Dann ist

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \det{}^{1/2}(A_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \prod_{j=1}^n \sqrt{\varepsilon + id_j} = \prod_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\searrow 0} \sqrt{\varepsilon + id_j}$$

$$= |\det A_1|^{1/2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{4}\cdot \mathrm{sign}(A_1)\right), \text{ dabei}$$

$$\mathrm{sign}(A_1) = \sum_{j=1}^n \mathrm{sign}(d_j)$$

Damit kommen wir zum Ergebnis dieses Beispiels:

<u>Satz 3</u>: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ symmetrisch und invertierbar mit $\mathrm{Re}\,A$ positiv semidefinit. Dann gilt für $g_A(x) = \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)$:

$$\hat{g_A}(\xi) = \frac{1}{\det^{1/2}(A)} \cdot g_{A^{-1}}(\xi).$$

Im Fall $A = iA_1$ ist dies aufzufassen als

$$\hat{g_A}(\xi) = \frac{1}{|\det A_1|^{1/2}} \exp(-i\tfrac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}(A_1)) \exp(i\langle \xi, A_1^{-1}\xi\rangle/2).$$

<u>Bem.</u>: Die wichtigsten Fälle hierbei sind

$$g(x) = \exp(-|x|^2/2) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2),$$

was u.a. für die Wärmeleitungsgleichung von Bedeutung ist, und zum anderen, mit $A_1 = -\mathrm{Id}$

$$\tilde{g}(x) = \exp(i|x|^2/2) \Rightarrow \hat{\tilde{g}}(\xi) = (\sqrt{i}\,)^n \exp(-i|\xi|^2/2),$$

was für die Schrödingergleichung relevant ist. (Hierin kann man auch $i$ überall durch $-i$ ersetzen.)

<u>Bew.</u>: Sei $u(x) = g_A(x) = \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)$. Dann erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = u(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle x, Ax\rangle/2)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle x, Ax\rangle/2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\, x_k x_l = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l + \sum_{k=1}^{n} a_{kj}x_k\Big)$$

$$\underset{\text{Symmetrie}}{=} -\sum_{l=1}^{n} a_{jl}x_l = -(Ax)_j$$

Also $\quad \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = -(Ax)_j\, u(x)$ oder, vektoriell geschrieben:

$$\nabla_x u(x) = -Ax\, u(x). \qquad (*)$$

Multiplikation mit $A^{-1}$ ergibt $A^{-1}\nabla_x u(x) = -x\, u(x)$ und anschließende Fouriertransformation führt auf

$$A^{-1} i \xi \hat{u}(\xi) = -i \nabla_\xi \hat{u}(\xi),$$

also $$\nabla_\xi \hat{u}(\xi) = -A^{-1}\xi \cdot \hat{u}(\xi). \qquad (**)$$

D.h. $\hat{u}$ genügt der gleichen Dgl. $(*)$ wie $u$, wobei allerdings $A^{-1}$ anstelle von $A$ steht. Wir setzen

$$v(\xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \exp(\langle \xi, A^{-1}\xi\rangle/2)$$

und erhalten

$$\nabla_\xi v(\xi) = (\nabla_\xi \hat{u}(\xi)) \cdot \exp(\langle \xi, A^{-1}\xi\rangle/2) + \hat{u}(\xi)\cdot \nabla_\xi \exp(\langle \xi, A^{-1}\xi\rangle/2)$$

$$= \exp(\langle \xi, A^{-1}\xi\rangle/2)\,\big(\underbrace{-A^{-1}\xi \cdot \hat{u}(\xi)}_{\text{aus! } (**)} + \underbrace{A^{-1}\xi \cdot \hat{u}(\xi)}_{\text{aus Rechnung für } (*)}\big) = 0$$

Daraus folgt $v(\xi) = c$ für eine absolute Konstante $c \in \mathbb{C}$ und

$$\hat{u}(\xi) = c \cdot \exp(-\langle \xi, A\xi\rangle/2)$$

Zur Bestimmung von $c$ sei zunächst $\operatorname{Re} A > 0$ angenommen. Dann erhalten wir für $\xi = 0$

$$c = \hat{u}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)\, dx = \frac{1}{\det^{1/2}(A)},$$

wobei sich das letzte "=" aus dem Ergebnis zu (iii) ergibt.

Im Fall $\operatorname{Re} A = 0$, also $A = iA_1$, setzen wir $A_\varepsilon := \varepsilon 1 + iA_1$ und erhalten (mit der Stetigkeit der Fouriertransformation und der Inversion von Matrizen):

$$\hat{g_A}(\xi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{g_{A_\varepsilon}}(\xi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\det^{1/2}(A_\varepsilon)} \exp\left(-\langle \xi, A_\varepsilon^{-1} \xi \rangle / 2\right)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \det^{1/2}(A_\varepsilon)} \cdot \exp\big(\underbrace{-\langle \xi, (iA_1)^{-1} \xi \rangle / 2}_{= i \langle \xi, A_1^{-1} \xi \rangle / 2}\big)$$

woraus sich zusammen mit der vorhergehenden Grenzwertüberlegung der Zusatz ergibt.

Anwendung: Lösung des Cauchy-Problems für die Wärmeleitungs- und Schrödinger-Gleichungen:

Satz 4: Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symmetrisch, invertierbar und $\operatorname{Re} A$ positiv semidefinit sowie $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei

$$u \in C([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x))$$

eine Lösung des Cauchy-Problems $u(t=0) = u_0$ für die Dgl.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A \nabla_x \rangle u = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Dann gilt für $t > 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{\det^{1/2}(A)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\langle y, A^{-1} y \rangle / 4t\right) u_0(x-y)\, dy.$$

Bem.: Das Erfülltsein der Dgl. in der Voraussetzung ist im Sinne distributioneller Ableitungen zu verstehen, d.h.

wir verlangen für alle $f \in S(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t : t > 0\}$, dass

$$-u\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = u\left[\langle \nabla_x, A\nabla_x \rangle f\right].$$

Bew.: Vorausgesetzt sind $\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A\nabla_x \rangle u$ und $u(t=0) = u_0$. Die partielle Fouriertransformation bezüglich der Raumvariablen sei mit $\mathcal{F}_x$ bezeichnet. Dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_x u = -\langle \xi, A\xi \rangle \mathcal{F}_x u. \qquad (*)$$

Wir definieren $v \in C([0,\infty), S'(\mathbb{R}^n_\xi))$ durch

$$v(t) = e^{t\langle \xi, A\xi \rangle} \mathcal{F}_x u(t).$$

Dann ist

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) = \langle \xi, A\xi \rangle v(t) + e^{t\langle \xi, A\xi \rangle} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_x u(t) \overset{(*)}{=} 0,$$

und hieraus können wir folgern, dass $v$ unabhängig von $t$ ist (vgl. Hörmander, Thm 3.1.4'). D.h. es existiert ein $v_0 \in S'(\mathbb{R}^n_\xi)$, so dass

$$v_0 = e^{t\langle \xi, A\xi \rangle} \mathcal{F}_x u(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F}_x u(t) = e^{-t\langle \xi, A\xi \rangle} v_0$$

Für $t=0$ sehen wir, dass $v_0 = \mathcal{F}_x u_0 = \hat{u}_0$. Nun verwenden wir wieder die Abkürzung für die Gaussfunktionen,

also $\qquad e^{-t\langle \xi, A\xi \rangle} = g_{2tA}(\xi)$.

Dann haben wir $\mathcal{F}_x u(t) = g_{2tA} \cdot \hat{u}_0$ bzw. nach Fourier-

Inversion

$$u(t) = \mathcal{F}_x^{-1}(g_{2tA} \cdot \hat{u}_0) \overset{\text{Faltungssatz}}{=} (2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}_x^{-1} g_{2tA}) * u_0 .$$

Dabei ist $g_{2tA}$ eine gerade Funktion und also

$$\mathcal{F}_x^{-1} g_{2tA}(x) = \mathcal{F}_x g_{2tA}(x) = \frac{1}{\det^{1/2}(2tA)} \cdot g_{(2tA)^{-1}}(x)$$

$$= \frac{1}{(2t)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\det^{1/2}(A)} \exp(-\langle x, (2tA)^{-1}x\rangle/2)$$

$$= \frac{1}{(2t)^{n/2}} \frac{1}{\det^{1/2} A} \cdot \exp(-\langle x, A^{-1}x\rangle/4t) .$$

Fassen wir die Vorfaktoren zusammen und schreiben die Faltung aus, so ergibt sich die Behauptung. □.

Diskussion:

(1) Für die Wärmeleitungsgleichung lautet die Integraldarst.

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} u_0(x-y)\,dy \quad ,$$

denn hier ist $A$ gerade die Einheitsmatrix.

(2) Für die Schrödingergleichung $iu_t + \Delta u = 0$ bzw. $u_t - i\Delta u = 0$ haben wir $A = +i \cdot 1$, also $A^{-1} = -i \cdot 1$

und das Ergebnis lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}^{\,n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} u_0(x-y)\,dy$$

Dies liefert auch für $t<0$ eine Lösungsformel.

(3) Wir haben einen Eindeutigkeitssatz bewiesen. Wenn $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, ergibt sich für $t \neq 0$, dass unser Kandidat für eine Lösung eine $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times (0,\infty)_t)$-Funktion ist – Differentiation unter dem Integral lässt sich wg. $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rechtfertigen. Eine (etwas längliche) Rechnung zeigt dann, dass die Dgl. auf $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^+_t$ im klassischen Sinne erfüllt ist. (Dies gilt auch für $\operatorname{Re} A = 0$ oder lediglich semidefinit.)

(4) Anfangswertproblem: In beiden Fällen scheint der Vorfaktor $(4\pi t)^{-n/2}$ für den Grenzwert $t \searrow 0$ etwas Kummer zu bereiten. Für die WLG (allgemeiner für den Fall $\operatorname{Re} A$ positiv definit) lässt sich dieses Problem mit einer einfachen Überlegung lösen:

Wir stellen fest, dass es sich bei der Funktionenschar $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ $(t>0)$ um eine approximative Einheit handelt. In der Tat ist

$$G_t(x) = (\sqrt{2t})^{-n} \cdot G_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right), \quad G_{1/2}(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot e^{-|x|^2/2}$$

und wir wissen $\int_{\mathbb{R}^n} G_{1/2}(x)\,dx = 1$. Die allgemeinen Konvergenzaussagen für approx. Einheiten ergeben, selbst wenn $u_0$ lediglich stetig und beschränkt ist, dass

$$\lim_{t \searrow 0} G_t * u_0 = u_0$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz ist.

Für die Schrödingergleichung werden wir die Frage der punktweisen Konvergenz der Lösung gegen die Daten bald sehr leicht beantworten können – jedenfalls für hinreichend gute Daten ($u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ ist nicht wirklich erforderlich!)

(5) Aus (3) und (4) ergibt sich: Für $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Integraldarstellung die Existenzfrage auch gelöst.

(6) Ist $u_0$ in einem normierten Funktionenraum $X$, in dem $S(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt (etwa: $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$) und läßt sich der Lösungsoperator

$$U_\varphi : u_0 \mapsto U_\varphi u_0, \quad U_\varphi(t) u_0 = E_t * u_0$$

(mit $E_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \frac{1}{\det^{1/2}(A)} \exp(-\langle x, A^{-1}x\rangle/2$, wie oben)

stetig nach $C([0,\infty), X)$ fortsetzen, so betrachtet man diese ebenfalls als "die Lösung" des Cauchy-Problems, auch wenn Fragen wie punktweise Konvergenz der Lösung gegen die Daten noch ungeklärt sind.

(7) Dispersive oder time decay-Abschätzungen:

Aus der Integraldarstellung ~~folgt~~

$$u(x,t) = c_A \cdot t^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\exp(-\langle y, A^{-1}y\rangle/4t)}_{|\dots| \le 1} u_0(x-y)\,dy$$

folgt unmittelbar die $L^\infty - L^1$-Abschätzung

$$\| u(\cdot, t)\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-n/2} \|u_0\|_{L^1_x}.$$

Andererseits hat der Beweis gezeigt, dass

$$\mathcal{F}_x u(t) = \underbrace{e^{-t\langle\xi, A\xi\rangle}}_{|\ |\leq 1} \hat{u}_0 \quad ,$$

woraus $\|\mathcal{F}_x u(t)\|_{L^2_\xi} \leq \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi}$ und mit Plancherel folgt:

$$\|u(t)\|_{L^2_x} \leq \|u_0\|_{L^2_x} \quad \left(\begin{array}{l}\text{im Fall } \operatorname{Re} A = 0 \text{ sogar} \\ \text{mit Gleichheit!}\end{array}\right)$$

In dieser Situation bietet es sich an, den Interpolationssatz von Riesz-Thorin anzuwenden:

Satz (Riesz-Thorin): Es seien $1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq \infty$ und, für $j \in \{0,1\}$, $T_j : L^{q_j}(\mu) \longrightarrow L^{p_j}(\nu)$ stetige lineare Abbildungen mit Operatornormen $M_j$. Auf $L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$ seien $T_0$ und $T_1$ identisch und es gebe ein $\theta \in [0,1]$, so dass

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

$T$ sei die Einschränkung von $T_0$ (bzw. $T_1$) auf $L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$. Dann gilt $\forall f \in L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$ die Abschätzung

$$\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_q \, ,$$

die eine eindeutige Fortsetzung von $T$ zu $T_\theta : L^q(\mu) \to L^p(\nu)$ erlaubt.

(Der Beweis verwendet das Max.-Prinzip für holomorphe Funktionen, s. Vorl. harmonische Analysis. Verallgemeinerungen dieses Satzes werden auch als „komplexe Interpolationsmethode" bezeichnet.)

Anwendung auf

$T_0 : L^1_x(\mathbb{R}^n) \to L^\infty_x(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \mapsto u(\cdot,t) = U_\varphi(t)u_0$ = Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A\nabla_x\rangle u$ mit $u(t=0) = u_0$ zur Zeit $t>0$.

und

$T_1 : L^2_x(\mathbb{R}^n) \to L^2_x(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \longmapsto u(\cdot,t) =$ s.o.

mit Operatornormen $M_0 = C_A\, t^{-n/2}$ und $M_1 = 1$ ergibt für

$p \in (1,2)$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$ und

$q \in (2,\infty)$ " $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'}$, so dass $1-\theta = \frac{1}{p} - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$

die Abschätzung

$$\| U_\varphi(t)u_0 \|_{p'} \leq C_A^{1-\theta}\, t^{-\frac{n}{2}(1-\theta)} \|u_0\|_p \lesssim_A t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|u_0\|_p$$

und erlaubt die Fortsetzung des Lösungsoperators zu

$$U_\varphi(t) : L^p_x(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}_x(\mathbb{R}^n),\ u_0 \mapsto U_\varphi(t)u_0 .$$

mit dem <u>Time-decay-estimate:</u>

$$\| U_\varphi(t)u_0 \|_{L^{p'}_x(\mathbb{R}^n)} \lesssim_A t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|u_0\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)} .$$