Vorlesung über

<u>Nichtlineare dispersive Gleichungen</u> (im WiSe 17/18)

1. Grundlagen

1.1 Einführung

09.10.17

(i) Die <u>Gleichungen</u> bzw. Gleichungssysteme, mit denen ich mich in dieser Vorlesung beschäftigen will, haben die folgende Gestalt

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u) . \qquad (1)$$

Hierbei sind

- $u : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{K}^N$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$), $(x,t) \longmapsto u(x,t)$ die gesuchte Lösung, die von den Ortsvariablen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und der Zeitvariable $t \in I \subset \mathbb{R}$ (I: Intervall) abhängt. Es handelt sich bei (1) also um eine <u>Evolutionsgleichung</u>, die die zeitliche Entwicklung eines (physikalischen) Systems modelliert.

  In vielen Fällen werden wir uns auf den Fall $N=1$, also auf eine einzelne Gleichung, beschränken.

  In Teilen der Vorlesung suchen wir solche Lösungen, die (semi-) periodisch in den Raumvariablen sind. In diesem Fall schreiben wir

  $u : \mathbb{T}^n \times I \rightarrow \mathbb{K}^N$ bzw. $u : \mathbb{T}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \times I \longrightarrow \mathbb{K}^N$,

  wobei $\mathbb{T} : \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \cong S^1$ der eindimensionale Torus ist.

- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ die partielle Ableitung nach der Zeitvariablen t,
- $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ der Gradient bezüglich der Ortsvariablen, dies wird manchmal durch ein zusätzliches Subscript betont: ∇_x. (∇_{xt} wäre dann der vollständige Gradient.)
- $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}^{N \times N}$ die (im Prinzip matrixwertige) sogenannte Phasenfunktion. Deren Matrixelemente sind, im Fall, dass (1) tatsächlich eine partielle Differentialgleichung (im engeren Sinne) ist, Polynome.

Etwa, für

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ und einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

und ein Monom $\varphi(\xi) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i} =: \xi^\alpha$

haben wir $\varphi(-i\nabla) = (-i)^{|\alpha|} \cdot \nabla^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \prod_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\alpha_i}$.

Wir werden aber auch allgemeinere Phasenfunktionen betrachten, die wir (da die Raumvariablen im gesamten $\mathbb{R}^n$ zugelassen sind) gut handhabbar mit Hilfe der Fouriertransformation erklären können:

Kurzer Exkurs / Erinnerung: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F} f(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \qquad (x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i)$$

Dann gilt, falls auch $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix\xi}\right) f(x)\, dx$$

$$= (-1)(-i) \cdot \xi_j \cdot (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = i\xi_j \hat{f}(\xi).$$

Nehmen wir jetzt an, φ sei ein Polynom, der Einfachheit halber

$$\varphi(\xi) = \xi^\alpha$$

und f eine Funktion, die Ableitungen bis zur Ordnung $|\alpha|$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Dann ist

$$\mathcal{F}(\varphi(-i\nabla)f)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}\Big(\prod_{i=1}^{n}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big)^{\alpha_i} f\Big)(\xi)$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, i^{|\alpha|}\,\varphi(\xi)\cdot\hat{f}(\xi) = \varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi).$$

Das heißt – wenn auch noch $\varphi(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist – haben wir

$$\varphi(-i\nabla)f = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F},$$

wobei die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, g(\xi)\,d\xi.$$

(vgl.: Vorl. Harmonic analysis. Nachzulesen in: Grafakos, Kap. 2.2)

Diese Übereinstimmung im Fall von Polynomen können wir nutzen, um allgemeiner $\varphi(-i\nabla)$ zu erklären durch

$$\varphi(-i\nabla)f(x) := \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\xi)\hat{f})(x) \qquad (2)$$

(Nebenbem.: Wir benötigen eine allgemeinere Definition der Fouriertransformation, so dass z.B. die Inverse stets in natürlicher Weise existiert und auch die Ableitungen von Funktionen stets transformiert werden können.)

Ist die Funktion φ in (2) kein Polynom, so nennt man $\varphi(-i\nabla)$ einen Pseudodifferentialoperator (ΨdO) und Gleichungen, die solche Operatoren enthalten, heißen Pseudodifferentialgleichungen.

Die Phasenfunktion ist das bestimmende Merkmal des linearen Teils von (1), und sei bestimmt durch dispersiven Charakter der Gleichung (S. (   )).

- Schließlich ist $N(u)$ der nichtlineare Teil der Gleichung mit einer Funktion N, die nicht nur von der (gesuchten) Lösung u, sondern auch von deren Ableitungen und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch von $\bar{u}$ abhängt. Hierbei werden wir später gewisse Einschränkungen machen dahingehend, dass die Ableitungsordnung im linearen Teil diejenige im nichtlinearen Teil überwiegt und wir uns im Bereich der sog. "semilinearen" Gleichungen bewegen. Methodisch bedeutet das, dass wir den nichtlinearen Teil $N(u)$ als "kleine" Störung der linearen Gleichung behandeln können – zumindest für kurze Zeiten oder im Fall kleiner Amplitude (d.i. $|u|$). (Im Moment betrachten wir $N(u)$ allerdings noch als "black box".)

(ii) Erste Beispiele:

(1) Schrödinger-Gleichungen

Die lineare Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u = V \cdot u \;, \quad \text{dabei}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{der Laplace-Operator und}$$

$$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; x \mapsto V(x) \quad \text{ein reellwertiges Potential}$$

ist die Grundgleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik (für ein einzelnes Elementarteilchen, was zugleich als Welle aufgefasst wird).

$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ ist die W.-keit, dass das von u beschriebene Teilchen zur Zeit t im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ befindet. (Dies setzt die Normierung $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ voraus.)

Für die "freie Gleichung" haben wir

$$u_t - i\Delta u = u_t - i\Big(\underbrace{-\sum_{j=1}^n \big(i\tfrac{\partial}{\partial x_j}\big)^2}_{=\varphi(-i\nabla)}\Big)u = 0$$

, also ist die Phasenfunktion hier $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$.

Verschiedene Nichtlinearitäten werden in der Literatur viel diskutiert

(1.1) Die semilineare Schrödingergleichung (NLS)

$$iu_t + \Delta u = |u|^{p-1} u$$ mit einem $p > 1$ (nicht notwendig ganz),

insbesondere der Fall $p = 3$ (cubic NLS) tritt in einer Vielzahl von Modellgleichungen aus verschiedenen Bereichen der Physik auf. Man kann die rechte Seite als $V \cdot u$ interpretieren mit einem reellen Potential, das hier allerdings von der unbekannten u abhängt.

(1.2) Nichtlineare Schrödingergleichungen mit Ableitungen (= derivatives, also DNLS) mit

$N(u) = P(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla\bar{u})$, P Polynom (allgemein), insbes. ist $N(u) = \partial_x(|u|^2 u)$ eine Modellgleichung in einer Raumdimension, die aus der Plasma-Physik kommt.

(2) Die vermutlich am besten (mit verschiedenen mathematischen Methoden) untersuchte dispersive Wellengleichung ist die <u>Korteweg-de Vries-Gleichung</u> <u>(KdV)</u> (6)

$$u_t + u_{xxx} = (u^2)_x \qquad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ n = 1 \right)$$

Sie wurde 1895 von D. J. Korteweg und G. de Vries hergeleitet um das Phänomen langer, stabiler Wasserwellen in einem schmalen Kanal zu beschreiben (sog. Solitärwellen oder kurz Solitonen). Ihr linearer Anteil

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

hat einen eigenen Namen erhalten: Die <u>Airy-Gleichung</u>.

Aus $u_{xxx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u = -i\left(-i \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \overset{!}{=} -i\,\varphi\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ lesen wir ab, dass in diesem Fall die Phasenfunktion

$$\varphi(\xi) = \xi^3,$$

also insbes. kubisch ist. Verallgemeinerungen der KdV-Gleichung in verschiedener Richtung werden untersucht, und manche davon treten tatsächlich auch als "Universal-Modelle" für diverse physikalische Phänomene auf:

(2.1) die "generalized KdV" equation

$$u_t + u_{xxx} = (u^{k+1})_x \qquad (g\text{-KdV-}k),\ k \in \mathbb{N}$$

$k=1$: ursprüngliche KdV-Gleichung

$k=2$: sog. modifizierte KdV- " , (mKdV),

zwischen den Lösungen dieser beiden Gln. gibt es eine nichtlineare Transformation, die "Miura-map".

(Mitunter werden auch nichtganzzahlige Exponenten $\alpha \in (1,\infty)$ untersucht.)

(2.2) die "dispersion generalized" KdV-equation:

$$u_t - |D_x|^\alpha \partial_x u = (u^{k+1})_x ,$$

wobei der ΨdO. $|D_x|^\alpha = \mathcal{F}_x^{-1}|\xi|^\alpha \mathcal{F}_x$ mit Hilfe der Fourier-transformation erklärt ist. Hier hat man die

Phasenfunktion: $\varphi(\xi) = |\xi|^\alpha \xi$.

Spezieller Fall: $\alpha = 1$, $k = 1$: Benjamin-Ono-eq. (BO)

~ $k \geq 2$: generalized BO (gBO-k)

→ Dieser erweist sich als deutlich schwieriger als (gKdV) bzw. als der Fall $\alpha > 1$.

(2.3) Verallgemeinerungen auf höhere Raumdimensionen:

(2.3.1) Zakharov-Kuznetsov-equation

$$u_t + \partial_x \Delta u = \partial_x (u^{k+1}) \qquad (gZK-k),\ k \in \mathbb{N}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ der volle Laplace-Operator bezüglich aller Raumvariablen. Mit $u : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$, $(x, \underset{\in \mathbb{R}^{n-1}}{y}, t) \mapsto u(x,y,t)$

$k = 1$, $n \in \{2,3\}$: beschreibt die Ausbreitung nichtlinearer akustischer Wellen in einem magnetisierten Plasma

$n = 3$: Zakharov-Kuznetsov (1974)

$n = 2$: Laedke-Spatschek (1982)

(2.3.2) Kadomtsev-Petviashvili-equation

$$u_t + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^{-1} \Delta_y u = \partial_x (u^{k+1}) \qquad (gKP-k)$$

$\varepsilon = -1$: KP-I, $\varepsilon = +1$ KP II

K+P, 1970: Lange Oberflächen-Wellen in x-Richtung auf einer Flüssigkeit ($n=2$) bei langsamer Bewegung in y-Richtung ($k=1$)

Die Phasenfunktion ist hier

$$\varphi(\xi,\eta) = \xi^3 \mp \varepsilon \frac{|\eta|^2}{\xi} ,$$

und der Faktor $\frac{1}{\xi}$ bereitet in der Tat gewisse technische Schwierigkeiten.

(2.3.3) Novikov-Veselov-Gleichung ($n=2$). Reelle Formulierung

$$u_t - \frac{1}{4}(\partial_x^3 - 3\partial_x\partial_y^2)u = 3N(u) \quad \text{mit}$$

$$N(u) = \partial_z(uv) + \partial_{\bar z}(u\bar v) , \text{ dabei } \partial_{\bar z} v = \partial_z u$$

und $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$

Also eine quadratische Nichtlinearität mit im wesentlichen einer Ableitung, aber (aufgrund des TdO.s $\partial_{\bar z}^{-1}\partial_z$) dennoch recht komplizierter Struktur.

$$\varphi(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}(\xi^3 - \xi\eta^2)$$

(3) Klein-Gordon- und Wellengleichungen (im engeren Sinne):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = N(u) \qquad \text{(NKG)}$$

$m=0$: eigentliche Wellengleichung, $m>0$: KGG.

Die lineare Klein-Gordon-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = V\cdot u \qquad (V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ von } u \text{ unabhängige Potentialfunktion})$$

wurde in den 1920er Jahren unabhängig von Schrödinger einerseits und Klein + Gordon andererseits vorgeschlagen als grundlegende Gleichung einer relativistischen Formulierung der Quantentheorie. Sie erwies sich als unvereinbar mit der axiomatischen Formulierung der Quantenmechanik, die wenig später entwickelt wurde (J. v. Neumann u.a.) und die eine Dgl. 1. Ordnung in der Zeitvariable t verlangt. Dieser Forderung genügt die Dirac-Gleichung, die im Lauf der 1930er Jahre die KGG verdrängt hat. Dennoch tritt die nichtlineare KGG – oft in Systemen mit anderen Gleichungen – in verschiedenen physikalischen Theorien auf, die Relativitätstheorie und QM zu verbinden suchen.

Nichtlinearitäten: $|u|^{p-1}u$, $P(u, u_t, \nabla u)$

Inwiefern liegt eine ~~Gl~~Gleichung vom Typ (1) vor, und was ist in diesem Fall die Phasenfunktion?

Dazu schreiben wir den Operator auf der linken Seite der Gl. als

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \underbrace{(-\Delta + m^2)}_{A^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + i\underbrace{\sqrt{-\Delta + m^2}}_{=:A}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{-\Delta + m^2}\Big)$$

$$= -\Big(\frac{\partial}{\partial t} + iA\Big)\Big(iA - \frac{\partial}{\partial t}\Big)$$

und nehmen an, u sei eine Lösung von (NKG). Dann setzen wir

$$u_\pm := \frac{1}{2i} A^{-1}\Big(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}\Big)u$$

Dann ist $u_+ + u_- = \frac{1}{2i} A^{-1}\Big(iA + \frac{\partial}{\partial t} + iA - \frac{\partial}{\partial t}\Big)u = u$

und als Dgl.-System für u_+ und u_- erhalten wir

$$(iA \mp \tfrac{\partial}{\partial t})u_\pm = \frac{1}{2i}A^{-1}(iA \mp \tfrac{\partial}{\partial t})(iA \pm \tfrac{\partial}{\partial t})u$$

$$= -\frac{1}{2i}A^{-1}(\tfrac{\partial}{\partial t} \mp iA)(\tfrac{\partial}{\partial t} \pm iA)u$$

$$= -\frac{1}{2i}A^{-1}(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + A^2)u = -\frac{1}{2i}A^{-1}N(u_+ + u_-)$$

Also: $(\frac{\partial}{\partial t} \mp iA)u_\pm = \pm \frac{1}{2i}A^{-1}N(u_+ + u_-)$

mit $A = \sqrt{-\Delta + m^2} = \varphi(-i\nabla)$ für $\varphi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$,

und das ist ein System aus zwei Gln. 1. Ordnung vom Typ (1) anstelle der einzelnen (NKG), mit der wir gestartet sind.

13.10.17

(iii) Das Anfangswertproblem (I): Die homogene lineare Gl.

Gleichungen vom Typ (1) haben in der Regel eine Vielzahl von Lösungen. Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, muss man zusätzlich die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3}$$

mit einem gegebenen $u_0 \in H$ stellen. Hierbei ist H ein Vektorraum von (verallgemeinerten) Funktionen, die auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind. (H wird in der Regel ein Hilbertraum sein, $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist – z.B. im Hinblick auf die Diskussion zur Schrödingergleichung – geeigneter Kandidat.) Gleichung (1) zusammen mit der AB (3) wird als das Cauchy-Problem (für die Gl. (1)) bezeichnet. Das soll jetzt für die homogene lineare Gleichung durch eine formale Rechnung gelöst werden, wir betrachten also:

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = 0\,, \qquad u(0) = u_0 \tag{4}$$

Wir nehmen u_0 und u so glatt und schnell fallend an, dass die folgende Rechnung mit der Fouriertransformation bezüglich der Raumvariablen x allein (bei festem t) gerechtfertigt werden können. Transformation beider Gleichungen und Vertauschung von $\mathcal{F}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ ergibt:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = i\varphi(\xi)\hat{u}(\xi,t)\,, \qquad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi)$$

Jetzt fixieren wir $\xi \in \mathbb{R}^n$ und haben für

$$f(t) := \hat{u}(\xi,t)$$

die gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$f'(t) = i\varphi(\xi)f(t)$$

mit Anfangsbed. $f(0) = \hat{u}_0(\xi)$. Dies ist eine homogene lineare Dgl. mit der eindeutigen Lösung

$$\hat{u}(\xi,t) = f(t) = e^{it\varphi(\xi)}\hat{u}_0(\xi).$$

Jetzt halten wir t fest und betrachten ξ als variabel. Dann ergibt die bedenkenlose Anwendung der Fourierinversionsformel

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t\varphi(\xi)+x\xi)}\hat{u}_0(\xi)\,d\xi =: U_\varphi(t)u_0(x) \tag{5}$$

(einen Kandidaten für) die Lösung mit einer einparametrigen Schar $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ von Lösungsoperatoren (= lineare Abbildungen)

$U_\varphi(t): u_0$ (= Datum) $\mapsto U_\varphi(t)u_0$ (= Lösung des Cauchy-Problems (4) zur Zeit t).

Zwei Interpretationen der Lösungsformel (5):

(a) mathematisch. Dazu ein kurzer Exkurs: Faltung und Fouriertransformation

Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

(Hinweis: Andere Normierung als in der "harmonic analysis"!)

Durch wiederholte Anwendung von Fubini erhalten wir für deren Fouriertransformierte

$$\widehat{f*g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\,dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x-y)\,d\cancel{x}\; g(y)\,dy \qquad (x \rightsquigarrow x+y) + \text{Funktionalgleichung}$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)\,e^{-iy\xi}g(y)\,dx\,dy$$

$$= (2\pi)^{n/2}\cdot\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)\,dx\right)\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y}g(y)\,dy\right)$$

$$= (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) \qquad \text{(Faltungssatz)}$$

Nach Lösungsformel (5) haben wir

$$\hat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(U_\varphi(t)u_0)(\xi) = e^{it\varphi(\xi)}\cdot\hat{u}_0(\xi),$$

also nach dem Eindeutigkeitssatz für die FT

$$u(x,t) = U_\varphi(t)u_0(x) = \cancel{(2\pi)^{-n/2}}\; E_\varphi(t) * u_0(x),$$

wobei $\widehat{E_\varphi(t)}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}e^{it\varphi(\xi)}$ ist.

Die Funktion E_φ wird als "Fundamentallösung" des Cauchy-Problems (4) bezeichnet. Man kann sie auffassen als Lösung von

$$u_t = i\varphi(-i\nabla)u\,, \qquad u(0)=\delta_0\,,$$

wobei δ_0 das Dirac-Maß (oder Dirac'sche δ-Distribution) ist. (Dies ist erklärt durch

$$\delta_0(A) = \chi_A(0) \quad \text{bzw.} \quad \delta_0[f] = f(0)$$

als Maß (formal als Distribution = stetige Linearf.)

δ_0 ist das neutrale Element der Faltung!

Die Lösungen von (4) erhält man also – wenn der obige formale Kalkül aufgeht – als Faltung der Anfangsbedingung u_0 mit der Fundamentallösung $E_\varphi(t)$. Der Lösungsoperator $U_\varphi(t)$ ist demnach ein Faltungsoperator und vertauscht insbesondere mit Translationen.

$$\underline{\text{Zsf.}}\quad U_\varphi(t)u_0 = E_\varphi(t)*u_0\,,\quad \widehat{E_\varphi(t)}(\xi) = \frac{e^{it\varphi(\xi)}}{(2\pi)^{n/2}} \qquad (6)$$

$\underline{\text{Bem.}}$ + Bsp.: Die obige formale Rechnung ist im Rahmen der L^1-Theorie nur teilweise gerechtfertigt und lässt sich in manchen Fällen auch nicht durch eine allgemeinere Theorie von Faltung und FT rechtfertigen. Betrachten wir dazu die drei Bspe.:

(i) $u_t = \Delta u = i\cdot\varphi(-i\nabla)u$ mit $\varphi(\xi) = i|\xi|^2$ (WLG)

(ii) $u_t = i\Delta u = i\varphi(-i\nabla)u$ mit $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$ (SG)

(iii) $u_t = -\Delta u = i\varphi(-i\nabla)u$ " $\varphi(\xi) = -i|\xi|^2$ (Zeitinvertierte WLG)

Im Fall (i) haben wir $e^{it\varphi(\xi)} = e^{-t|\xi|^2}$, und das ist für jedes $t>0$ eine L^1-Funktion. Die Lösungsformel (5) lautet in diesem Fall

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix\xi} \cdot e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi$$

und hierfür sind alle oben angestellten Betrachtungen korrekt (im Rahmen der klassischen L^1-Theorie der Fouriertransformation und Faltung).

Fall (ii) $e^{it\varphi(\xi)} = e^{-it|\xi|^2}$ mit $|e^{-it|\xi|^2}| = 1 \ \forall t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi$$

ist definiert, wenn $\hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, aber um die Darstellung

$$u(x,t) = E_\varphi(t) * u_0(x)$$

zu gewinnen, müssen wir

- die Fouriertransformation und ihre Inverse für beliebig beschränkte meßbare Funktionen wie $e^{-it|\xi|^2}$ definieren und
- die Definition der Faltung entsprechend erweitern.

Die Lösungen für beide Fälle werden wir im nächsten Kapitel exakt ausrechnen.

Im Fall (iii) schließlich ist $e^{it\varphi(\xi)} = e^{t|\xi|^2}$ und (5) lautet

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{t|\xi|^2} \cdot \hat{u}_0(\xi)\, d\xi,$$

was wegen des starken Wachstums von $e^{t|\xi|^2}$ nur unter sehr starken Bedingungen an $\hat{u}_0$ existiert und nicht zu einem akzeptablen Lösungsoperator führt. (Selbst für Gaussfktn. hat man bei dieser Gleichung blow up in endlicher Zeit!)

(b) physikalisch. In der Formel (5) erhalten wir die Lösung u als Überlagerung (phys.: Superposition) der Funktionen 15

$$(x,t) \mapsto e^{i(x\xi + t\varphi(\xi))} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n \text{ Parameter}) \qquad (7)$$

durch Integration nach ξ. Solche Funktionen nennt man "ebene Wellen", wenn die "Amplitude" $|e^{i(x\xi+t\varphi(\xi))}|=1$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn $\varphi(\xi)\in\mathbb{R}$ ist (beides $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$).

<u>Def.</u>: Eine Gleichung vom Typ (1) heißt eine nicht lineare Wellengleichung (im allgemeinen Sinn), wenn $\varphi(\xi)\in\mathbb{R}$ gilt $\forall \xi\in\mathbb{R}^n$.

<u>Bem.</u>: (i) Wellengleichung im engeren Sinn: Gl. 2. Ordnung $\Longleftrightarrow$ System der Form (1) mit $\varphi(\xi) = \pm|\xi|$, wie oben erläutert.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung ist auch bei diesem allgemeineren Begriff keine Wellengleichung.(*)

(iii) Ist $\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + i\,\varphi_2(\xi)$ mit φ_1 reell und $\varphi_2(\xi)\geq 0$ $\forall \xi\in\mathbb{R}^n$, so kann man von einer Wellengleichung mit Dämpfung sprechen. (Werden wir hier aber nicht untersuchen, obwohl einige der vorgestellten Methoden durchaus auch hierfür geeignet sind.)

(iv) Für reellwertiges φ sind die Operatoren $U_\varphi(t)$ <u>unitäre</u> Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. es ist $U_\varphi(t)^* = U_\varphi(t)^{-1}$, wobei der adjungierte Operator A^* in einem Hilbertraum durch $\langle Ax,y\rangle =: \langle x, A^*y\rangle$ s. 15a

---

(*) Trotzdem werden wir sie hin und wieder zum Vergleich mit der formal sehr ähnlichen Schrödingergleichung heranziehen.

definiert ist. Das ist leicht einzusehen mit Hilfe des Satzes von Plancherel, wonach für alle $f,g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2_\xi} = \langle f, g \rangle_{L^2_x} .$$

(Dies zeigt man zunächst für $f,g \in L^1 \cap L^2$ und benutzt diese Identität, um $\mathcal{F}$ auf L^2 fortzusetzen. Siehe z.B. Vorl. „harmonic analysis".)

Damit hat man bei festem t und $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle U_\varphi(t) u_0, v_0 \rangle_{L^2_x} = \int_{\mathbb{R}^n} U_\varphi(t) u_0(x) \overline{v_0(x)}\, dx$$

$$\underset{\substack{\text{Plancherel,}\\ \text{(5), und Herleitung}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi(\xi)} \hat{u}_0(\xi) \overline{\hat{v}_0(\xi)}\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi) \overline{e^{-it\varphi(\xi)} \hat{v}_0(\xi)}\, d\xi \overset{\text{rückwärts}}{=} \langle u_0, U_\varphi(-t) v_0 \rangle_{L^2_x}$$

Also $U_\varphi(t)^* = U_\varphi(-t)$. Andererseits gilt aufgrund der Funktionalgleichung der exp-Funktion $\forall s,t \in \mathbb{R}$

$$U_\varphi(t+s) = \mathcal{F}^{-1} e^{i(t+s)\varphi(\xi)} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} e^{is\varphi(\xi)} \mathcal{F} \qquad (G1)$$

$$= U_\varphi(t) U_\varphi(s)$$ und insbesondere

$$U_\varphi(t) U_\varphi(-t) = U_\varphi(0) = Id, \text{ d.h. } U_\varphi(t)^* = U_\varphi(-t) = U_\varphi(t)^{-1}. \qquad (G2)$$

Ferner gilt (wieder mit Plancherel und) aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes, dass $\lim_{t \to 0} \| U_\varphi(t) u_0 - u_0 \|_{L^2} = 0$, das heißt wir haben auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ eine stark stetige Familie unitärer Operatoren $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ mit den Gruppeneigenschaften (G1) und (G2), und solch eine Familie nennt man eine *unitäre Gruppe*. Dies umfaßt die Isometrieeigenschaft $\| U_\varphi(t) u_0 \|_{L^2_x} = \| u_0 \|_{L^2_x}$, was als *Erhaltungssatz* für Lösungen der hom. lin. Dgl. aufgefaßt werden kann.

16.10.17

Man kann noch einen Schritt weitergehen und in den "ebenen Wellen (7) auch die Raumvariablen $x \in \mathbb{R}^n$ festhalten. Das Ergebnis sind die von den Parametern $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ abhängigen Fkten.

$$t \mapsto e^{ix\xi + it\varphi(\xi)} =: f(t),$$

die der Schwingungsgleichung $f''(t) = -\varphi(\xi)^2 f(t)$ mit der

<u>Frequenz</u>: $\varphi(\xi)$

genügt. Die Fouriervariable ξ wird in der physikalischen Literatur als <u>Wellenzahl</u> (eindim.) bzw. als <u>Wellenvektor</u> bezeichnet. (In der math. Lit. oft irreführend: Frequenz als Bezeichnung für ξ). Damit wird eine

<u>Wellenbewegung</u> <u>als Überlagerung</u> <u>von Schwingungen</u>

aufgefaßt, was sicherlich eine intuitiv überzeugende Vorstellung ist, auf der die gesamte Fourieranalysis basiert.

(iv) <u>Dispersion</u>

Bei Abwesenheit von Dämpfung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen gegeben durch die sog.

Gruppengeschwindigkeit $\quad V_g(\xi) := \nabla_\xi \varphi(\xi)$

Ist diese wie angegeben abhängig vom Wellenvektor ξ, so bedeutet dies, dass sich Beiträge unterschiedlicher (Wellenvektoren bzw.) Frequenzen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten. Dies führt zum "Zerfließen" oder zur Aufspaltung des Anfangsprofils u_0. Diesen Vorgang nennt man <u>Dispersion</u>, er läßt sich beobachten, wenn "weißes" Licht schräg auf ein (Glas-) Prisma fällt und in die Farben des Regenbogens aufgespalten wird. Dies beruht darauf, dass Licht verschiedener Frequenzen in Glas unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat und entsprechend unterschiedlich stark abgelenkt wird.

Mit dem "Zerfließen von Wellenpaketen" durch Dispersion ist ein schwacher Glättungseffekt verbunden, den man sich in der Analyse nichtlinearer dispersiver Gleichungen zunutze macht. Größenordnung z.B. bei der Schrödingergleichung in L^2_t-basierten Normen: $\frac{1}{2}$ Ableitung. (Vergleich Wärmeleitung: Hier wird aus einem lediglich beschränkten Anfangswert instantan eine C^∞-Funktion!)

Um den für diese Vorlesung zentralen Begriff der Dispersion noch etwas genauer zu erklären, möchte ich kurz eingehen auf zwei lineare Wellengleichungen, die nicht bzw. nur schwach dispersiv sind:

Bsp.: (i) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die Gleichung

$$u_t + v\nabla u = u_t + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial u}{\partial x_j}}_{=|v|\cdot\text{Richtungsableitung nach }\frac{v}{|v|}} = 0 \qquad (T)$$

heißt Transportgleichung. Wir fordern $v\cdot\nabla = -i\varphi(-i\nabla)$, was wg. $v\cdot\nabla = i v\cdot(-i\nabla)$ für $\varphi(\xi) = -v\cdot\xi$ erfüllt ist. Wir haben $\varphi(\xi)\in\mathbb{R}\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n$, insofern handelt es sich bei (T) um eine (lineare, da $N(u)=0$) Wellengleichung vom Typ (1). Diese ist jedoch nicht dispersiv, (18)

denn es ist $\nabla_\xi \varphi(\xi) = -v$ unabhängig von ξ.

Lösungsformel (5) ergibt für eine Startfunktion $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$U_\varphi(t)u_0 = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\xi - tv\xi)} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\hat{u}_0(x-vt) = u_0(x-vt),$$

$x\xi - vt\xi$
$= (x-vt)\xi$

ein Ergebnis, was man vielleicht auch ohne Fourierintegrale hätte erraten können.(*) Diese explizite Lösungsformel erklärt offenbar den Namen der Gleichung: Ihre Lösung besteht darin, dass das Anfangsprofil u_0 mit konstanter Geschwindigkeit v durch den $\mathbb{R}^n$ geschoben bzw. transportiert wird, ohne dass dieses Profil dabei deformiert wird. (Ein Zerfließen des Wellenpakets findet bei dieser nichtdispersiven Gleichung also tatsächlich nicht statt.)

Ferner erhalten wir ein erstes einfaches und explizites Bsp. für eine unitäre Gruppe.

(ii) Die klassische homogene lineare Wellengleichung

$$\Box u := u_{tt} - \Delta u = 0$$

(ii,i) Die 1.-dim. Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Wir zerlegen den Differenzialoperator $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)$,

---

(*) Dass es sich für eine diffbare Funktion u_0 tatsächlich um eine Lösung handelt, sieht man durch Anwendung der Kettenregel!

das ist etwas anders als oben. Wir sehen, dass der d'Alembert-Operator $\Box$ in zwei Transportoperatoren faktorisiert, und demzufolge ist die allgemeine Lösung von $u_{tt} - u_{xx} = 0$ gegeben durch

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t) \qquad (*)$$

mit beliebigen C^2-Funktionen F und G. Ist zusätzlich das Cauchy-Problem

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad u_t(x,0) = g(x)$$

gestellt, so ist dessen eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy \right\} \qquad \text{(Formel von d'Alembert)}$$

Was wir an $(*)$ ablesen können: Eine lineare Wellenbewegung in einer Raumdimension ist die Überlagerung von zwei reinen Transportvorgängen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten (man spricht von ein- und auslaufenden Wellen). Also: <u>Keine Dispersion!</u>

(ii, iii) $n \geq 2$. Auch hierfür existieren Lösungsformeln, die die von d'Alembert verallgemeinern ($\rightarrow$ Einführung PDG), in höheren Dimensionen recht kompliziert. Wir beschränken uns auf die Frage: Dispersiv oder nicht?

Wie oben gesehen, ist für die klassische Wellengleichung

$$\varphi(\xi) = \pm |\xi| \qquad \text{(euklidische Norm)}$$

und $\nabla_\xi \varphi(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$. Wir haben also $|\nabla_\xi \varphi(\xi)| = 1$ (konstant!), aber $\nabla_\xi \varphi(\xi)$ ist nicht unabhängig von ξ.

Und tatsächlich läßt sich für freie Lösungen der klassischen Wellengleichung ein Abfall (= decay) des Supremums mit der Zeit feststellen

$$\| U_{\pm|\xi|}(t) u_0 \|_{L^\infty_x} \lesssim_{u_0} |t|^{-\frac{n-1}{2}}, \longrightarrow \text{später}$$

was bei einem reinen Transportvorgang unmöglich ist. Wir haben also einen schwachen dispersiven Effekt, der darin besteht, dass ein (anfänglich möglicherweise stark konzentriertes) Wellenpaket sich mit der Wellenbewegung in alle Raumrichtungen gleichmäßig ausbreitet. Wie oben ablesbar, ist dieser Effekt umso stärker, je größer die Raumdimension ist.

(V.) Anfangswertproblem (II): Die inhomogene lineare und die nichtlineare Gleichung. Begriff der "milden Lösung" des Cauchy-Problems.

Zur Lösung des Cauchy-Problems $u(x,0) = u_0(x)$ für die <u>inhomogene</u> lineare Gleichung

$$u_t = i\,\varphi(-i\nabla)\,u + f \qquad (f = f(x,t))$$

hat man ähnlich wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen eine "Variation der Konstanten" bzw. <u>"Duhamel-Formel"</u> (auch: <u>"Duhamelsches Prinzip"</u>):

Die eindeutige Lösung des o.g. Problems ist gegeben durch

$$u(t) = U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s) f(s)\,ds\,, \qquad (8)$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert und f integrierbar ist, so dass der Hauptsatz gilt. (Die x-Abhängigkeit wurde in dieser Formel unterschlagen.)

Formaler Bew.: Sei u durch (8) gegeben, also

$$u(t) = U_\varphi(t)\,\Big(u_0 + \int_0^t U_\varphi(-s) f(s)\,ds\Big).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) = i\varphi(-i\nabla)\,U_\varphi(t)\,\Big(u_0 + \int_0^t U_\varphi(-s) f(s)\,ds\Big)$$

$$+\; U_\varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U_\varphi(-s) f(s)\,ds$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} i\varphi(-i\nabla)u + \underbrace{U_\varphi(t)\,U_\varphi(-t)}_{=I} f(t).$$

Wenn f integrierbar ist, aber die Gültigkeit des Hauptsatzes in Frage steht (weil f in den x-Variablen z.B. irregulär ist), nennt man u, definiert durch (8), eine milde Lösung des Cauchy-Problems

$$u_t - i\varphi(-i\nabla u)u = f \qquad u(0) = u_0.$$

Auf diese Weise umgeht man viele Schwierigkeiten mit vektorwertigen Integralen und schwachen Regularitäten.

In derselben Weise umgehen wir einige Schwierigkeiten für die nichtlineare Gleichung (1), indem wir defimieren!

Def.: Unter einer Lösung des Cauchy-Problems

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u), \qquad u(0) = u_0 \in H$$

verstehen wir eine Funktion $u \in C([0,T), H)$, die der Integralgleichung

$$u(t) = U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s)N(u(s))ds \qquad (8')$$

genügt.

Vorteil/Zweck: Fixpunktgleichung. Man versucht also, Fixpunktsätze, insbesondere den Banachschen, zur Lösung des Problems anzuwenden.

(vi) Das Konzept des Wohlgestellten Problems ("Well-posedness")(*): Anfangs- und Randwertprobleme für partielle Dgln. werden untersucht mit der Zielsetzung, aus der Kenntnis eines Systems zu einem Startpunkt (oder am Rand eines Gebietes) <u>Vorhersagen</u> zu treffen über den Zustand des Systems in der Zukunft (bzw. im Innern des Gebietes). Hierfür ist die Existenz einer Lösung allein nicht ausreichend, ihre Eindeutigkeit ist ebenso erforderlich. Wg. technischer oder prinzipieller Probleme bei der Messung der Daten (= Anfangs- oder Randzustände) benötigt man darüber hinaus die

(*) Dieses Konzept betrifft allgemein alle Rand- und Anfangswertprobleme für pDGen., nicht nur die dispersiven. Der Begriff "Wohlgestelltheit" wird aber zugeschnitten auf Evolutionsgln. formuliert.

stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten. Die Vorhersagen werden umso besser sein, je glatter die Abbildung Daten $\mapsto$ Lösung ist. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition, die im wesentlichen auf Hadamard zurückgeht.

Def. Wir nennen das Cauchy-Problem zu einer Gleichung vom Typ (1) lokal wohlgestellt (engl.: locally well-posed, LWP) in einem Datenraum H, wenn zu jedem $u_0 \in H$ ein $T(u_0) > 0$ existiert, so dass folgendes gilt:

(i) Es existiert ein linearer Teilraum $X_T \subset C([0,T], H)$ ($\subset$ meint auch: stetig eingebettet) und eine Lösung $u \in X_T$ der Integralgleichung $(8')$. (Hierbei hängt X_T nur von T, nicht von u_0 ab.)

(ii) Diese Lösung ist in X_T eindeutig bestimmt.

(iii) Ist $B_T := \{u_0 \in H : \exists \text{ Lösung } u \in X_T \text{ von } (8') \text{ mit } u(0) = u_0\}$, so ist die Lösungsabbildung

$$S_T : B_T \to C([0,T], H), \quad u_0 \mapsto u \quad (= \text{Lösung von } (8'))$$

stetig.

Bem.: (1) Wir nennen ein solches Cauchy-Problem

(a) schlecht gestellt, wenn es nicht lokal wohlgestellt ist (ill-posedness);

(b) global wohlgestellt (globally well-posed, GWP), wenn (i) bis (iii) auf jedem Zeitintervall $[0,T]$ gelten; (Das ist in der Regel bereits dann erfüllt, wenn sich die lokalen Lösungen eines LWP Problems auf jedes beliebige Zeitintervall $[0,T]$ fortsetzen lassen.)

(C) unbedingt wohlgestellt (unconditionally well-posed), wenn $X_T = C([0,T], H)$ gewählt werden kann.

(Eigenschaft (C) bedeutet lediglich eine Verschärfung der Eindeutigkeitsaussage (ii). Daher spricht man auch von "unconditional uniqueness". Die Unterscheidung zwischen conditional und unconditional ist keine Haarspalterei: Es gibt für Daten sehr geringer Regularität tatsächlich Beispiele von Problemen, die conditionally well-posed aber unconditionally ill-posed sind.)

(2) Ferner werden Wohlgestelltheitsaussagen differenziert nach der Regularität der Lösungsabbildung in Teil (iii) der Def.. So bedeutet etwa, ~~dass~~

- C^0_{unif}-well-posedness, dass S_T auf beschränkten Teilmengen von H gleichmäßig stetig, also uniformly continuous ist,
- C^k-well-posedness, dass S_T k-mal stetig differenzierbar ist usw.

Beweise von ill-posedness beziehen sich häufig auf die Regularität der Lösungsabbildung, etwa wenn gezeigt wird, dass S_T (falls existent) nicht C^k (für ein bestimmtes k) oder nicht C^0_{unif} sein kann. (Aus solchen Ergebnissen kann man oft folgern, dass das betrachtete Problem einer direkten Behandlung mit dem Banachschen Fixpunktsatz nicht zugänglich ist.)

(vii) Erhaltungsgrößen 20.10.17

Nichtlineare Wellengleichungen modellieren reale physikalische Phänomene. Daher gibt es (bei den relevanten Glen. jedenfalls) bestimmte physikalische Größen wie Masse, Energie, Impuls, Drehimpuls etc., die zeitlich konstant sind: die sog. Erhaltungsgrößen.

Die Masse ist $= \|u(t)\|^2_{L^2_x}$ und für semilineare Schrödinger-Glen. ebenso wie für KdV-ähnliche Gleichungen erhalten. Sie liefert unmittelbar eine sog. a priori-Abschätzung: Wenn eine Lösung existiert mit Anfangswert $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\forall t > 0$ (für die diese Lösung existiert):

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

(Wir müssen die Lösung nicht kennen, um diese Beziehung herzuleiten. Die Gleichung und einige Zusatzannahmen sind dafür ausreichend, deshalb die Bez. "a priori-Abschätzung".)
Da $\|u\|_{L^2}$ eine definite Größe ist, d.h. ≥ 0 mit "$=$" nur für $u = 0$, und wir erhalten eine gewisse Kontrolle über das Wachstum der Lösung, die wir für verschiedene Zwecke verwenden können – s.u.

Die kinetische Energie der Lösungen (nicht-)linearer Wellengleichungen ist zumeist ebenfalls eine definite (Erhaltungs)größe, oft $= \frac{1}{2}\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2_x}$. (Eine Ausnahme ist die Dirac-Gleichung, deren kinetische Energie das Vorzeichen wechseln kann.) Hieraus kann man häufig ebenfalls eine "a priori-Abschätzung" gewinnen.

Bsp.: Masse und Energie semilinearer Schrödingergln.

$$iu_t + \Delta u = \pm |u|^{p-1} \cdot u$$

1. Um die Erhaltung der L^2-Norm (= Masse) herzuleiten, multiplizieren wir die Gl. mit $\bar{u}$:

$$iu_t\bar{u} + \bar{u}\Delta u = \pm |u|^{p+1} \quad (S1)$$

Dann gilt auch die komplex konjugierte Gleichung:

$$-i\bar{u}_t \cdot u + u\Delta\bar{u} = \pm |u|^{p+1} \quad (S2)$$

Differenzbildung ergibt

$$i(u_t\bar{u} + \bar{u}_t u) + \bar{u}\Delta u - u\Delta\bar{u} = 0 \qquad (S1)-(S2)$$

Jetzt nehmen wir an, dass u samt 2. x-Ableitungen integrierbar ist und dass Integration nach x und Zeitableitung vertauschen. Dann folgt (Abh. von x und t unterdrückt)

$$0 = i\int_{\mathbb{R}^n} u_t\bar{u} + \bar{u}_t u + \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}\Delta u - u\Delta\bar{u} \, dx$$

part. Int.

$$= i \cdot \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla\bar{u} - \nabla\bar{u}\nabla u \, dx = i\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}$$

Also $\quad \|u(t)\|_{L^2_x} = \text{const}.$

Die Regularitätsannahmen an u lassen sich bei stetiger Abhängigkeit der Lösung von den Daten anschließend durch ein Approximationsargument "wegdiskutieren".

2. Für die Energieerhaltung multiplizieren wir mit

$$\Delta\bar{u} \mp |u|^{p-1} \cdot \bar{u}$$

Dann folgt

$$iu_t\Delta\bar u \mp iu_t\bar u|u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1}\bar u\Delta u = \pm|u|^{p-1}u\Delta\bar u - |u|^{2p} \quad (S3)$$

komplex konjugieren

$$-i\bar u_t\Delta u \pm i\bar u_t u|u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1}u\Delta\bar u = \pm|u|^{p-1}\bar u\Delta u - |u|^{2p} \quad (S4)$$

und die Differenz bilden

$$i(u_t\Delta\bar u + \bar u_t\Delta u \mp (u_t\bar u + u\bar u_t)|u|^{p-1} = 0$$

(S3) − (S4)

(Die $|u|^{p-1}\overset{(-)}{\bar u}\Delta\overset{(-)}{\bar u}$-Terme heben sich kreuzweise auf.)

$$\Rightarrow \quad u_t\Delta\bar u + \bar u_t\Delta u \mp \underbrace{|u|^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^2}_{=\frac{2}{p+1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1}} = 0$$

$\left(\text{denn! } \frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1} = \frac{\partial}{\partial t}(|u|^2)^{\frac{p+1}{2}} + \text{Kettenregel}\right)$

Integration ergibt

$$0=\int_{\mathbb{R}^n} u_t\Delta\bar u + \bar u_t\Delta u \mp \frac{2}{p+1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1}\,dx$$

jetzt! part. Int. der ersten beiden Summanden

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_t\cdot\nabla\bar u + \nabla\bar u_t\cdot\nabla u \pm \frac{2}{p+1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}\left(|\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1}|u|^{p+1}\right)dx$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1}|u|^{p+1}\,dx \quad \text{und damit}$$

$$E(u(t)) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2 \pm \frac{2}{p+1}|u(t)|^{p+1}dx = E(u_0)$$

Im +-Fall eine definite Größe, die $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ kontrolliert, sog. defocusing case. Im −-Fall kann man für $p = 1+\delta$ (dimensionsabhängig) noch $E(u(t)) \sim \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ erreichen. Für größere p kann es zu "blow-up" kommen ("focusing case").

Bem.: Energieerhaltung für (NLKG) in den Übungen. Erh. auch noch etwas zu KdV / mKdV ⇝ Folge von Erhaltungsgrößen, die immer höhere Ableitungen enthalten.

Man kann die Erhaltungsgrößen bzw. die daraus gewonnenen Abschätzungen zu verschiedenen Zwecken benutzen:

(i) Eindeutigkeitsbeweise: Klar für lineare Gln.: Man betrachtet die Erhaltungsgröße der Differenz zweier Lösungen zum selben Anfangswert. Diese verschwindet für $t=0$ und also auch $\forall t>0$. Ist die Erhaltungsgröße definit, kann man die Eindeutigkeit folgern. Dieses Argument kann für nichtlineare Gleichungen variiert werden.

(ii) Fortsetzung lokaler Lösungen zu globalen (bei beliebig großen Daten): Man zeigt (etwa mit Hilfe des Banachschen FPS) die lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems für eine Gleichung vom Typ (1) mit Daten in einem Datenraum H. In günstigen (d.h. subkritischen → später) Fällen ergibt das Fixpunktargument eine "Lebensdauer" (= Länge des Existenzintervalls) $T = T(\|u_0\|_H) > 0$, so dass T eine monoton fallende Funktion ist. ~~Ist dann $\|u(t)\|_H = c$, so kann man zur Zeit $t = T(\|u_0\|_H)$ dasselbe CP erneut stellen und dadurch die Lösung auf das Zeitintervall $[T(\|u_0\|_H), T(\|u(T)\|_H)]$ fortsetzen~~

Nun kann man zur Zeit $t_1 = T(\|u_0\|_H)$ das Cauchy-Problem mit Anfangsbedingung, sagen wir

$$\tilde{u}(0) = u(t_1)$$

erneut stellen und erhält eine Lösung $\tilde{u} \in C([0,T_1],H)$ mit $T_1 = T(\|u(t_1)\|_H)$. Nun kann man die ursprüngliche Lösung u durch $u(t) = \tilde{u}(t-t_1)$ auf das Intervall

$$[0,t_1] \cup [t_1, t_1 + T(\|u(t_1)\|_H)] = [0, t_1 + T(\|u(t_1)\|_H)]$$

stetig fortsetzen. Dieses Fortsetzungsargument lässt sich beliebig oft wiederholen, die Verlängerung des Existenzintervalls im k-ten Schritt sei Δ_k. Im allgemeinen wird $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k < \infty$ sein, und es bleibt bei einer lokalen Lösung.

Ist aber $\|u(t)\|_H$ eine Erhaltungsgröße, oder auch nur durch eine solche kontrolliert, etwa

$$\|u(t)\|_H \leq C\, E(u(t)) = C\, E(u_0),$$

so erhalten wir mit der Monotonie der Lebensdauerfunktion T, dass $\Delta_k \geq T(C\,E(u_0)) > 0$, also $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$, was bedeutet, dass die Lösung auf dem gesamten Intervall $[0,\infty)$ existiert.

(Randbem.: In der Literatur findet man recht raffinierte Varianten dieses Arguments, die allerdings eine genauere Kenntnis der Funktion T erfordern. Diese laufen darauf hinaus, die Folge $(\Delta_k)_k$ der Verlängerungen der Lebensdauer nach unten durch eine divergente Reihe abzuschätzen, etwa $\Delta_k \geq \frac{\varepsilon_0}{k}$ mit einem $\varepsilon_0 > 0$.)

(iii) <u>Konstruktion lokaler Lösungen</u>: Für eine bestimmte Phasenfunktion und eine spezielle Nichtlinearität sei bekannt, dass das Cauchy-Problem in keinem "vernünftigen" Datenraum H der[*] Behandlung mit dem Banachschen FPS zugänglich ist. Dies ist zum Bsp. der Fall bei der Benjamin-Ono-Gleichung

$$u_t + |D_x|\partial_x u = \partial_x(u^2) \qquad (BO)$$

und allen L^2-basierten Sobolevräumen ($\longrightarrow$ nächster Abschnitt). Dann kann man z. B. die <u>Technik der</u> sog. "<u>parabolischen Regularisierung</u>" anwenden und einen weiteren glättenden Term in die Gl. einbauen

$$u_t + |D_x|\partial_x u - \varepsilon\partial_x^2 u = \partial_x(u^2) \qquad (BO_\varepsilon)$$

Für $\varepsilon > 0$ ist die Lösung der homogenen linearen Gleichg dann instantan in C^∞, so dass man die Ableitungen auf der Nichtlinearität kontrollieren kann. Der FPS liefert Näherungslösungen u_ε von (BO_ε), ggf. für ebenfalls geglättete Daten $u_{0,\varepsilon}$.

Nun will man zeigen, dass $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ für $\varepsilon \to 0$ gegen eine Lösung von (BO) mit $u(0) = u_0$ (gegeben) konvergiert, und zu diesem Zweck verwendet man die aus Erhaltungssätzen gewonnenen a priori-Abschätzungen.

Die in (i) bis (iii) skizzierten Argumente werden in der Literatur als "energy methods" bezeichnet. Sie sind nicht spezifisch für dispersive Gleichungen, son-

[*] direkten

aber finden Anwendung bei allen Evolutionsglen., für die es definite Erhaltungsgrößen gibt.

Es gibt allerdings Weiterentwicklungen (speziell von Pkt. (iii) oben), bei denen man sich den dispersiven Charakter z.B. der Benjamin-Ono Gleichung zunutze macht. (Ich hoffe, gerade dieses Beispiel in einem späteren Kapitel der Vorl. diskutieren zu können.)

ENDE: EINLEITUNG