Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
25.06.2019
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

45. (Regel von de l'Hospital)

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \le k \le n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x\sin x} - \cos x}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

46. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x).$$

Besitzt f globale Extrema?

47. Berechnen Sie die Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sin^2(x),$$

indem Sie

(a) alle Ableitungen $f^{(n)}(0)$ berechnen und in die Definition der Taylorreihe einsetzen;

(b) das Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Hinweis und Zusatzfrage: Durch Koeffizientenvergleich sollten Sie auf die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ stoßen. - Warum ist a priori klar, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergiert?

Bitte wenden!

48. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Untersuchen Sie, auf welchen - möglichst großen - Teilintervallen von $\mathbb{R}$ die Funktion f

(a) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt und

(b) streng konvex bzw. streng konkav ist.

Abgabe: Di., 02.07.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 10.07.2019 und Do., 11.07.2019