Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2019/20
17.01.2020
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

45. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = x^2 e^{-x}$. Untersuchen Sie, auf welchen - möglichst großen - Teilintervallen von $\mathbb{R}$ die Funktion f

(a) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt und

(b) streng konvex bzw. streng konkav ist.

46. (Regel von de l'Hospital)

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq \beta$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta}.$$

47. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{-|x|} \cos(x)$. Bestimmen Sie

(a) das (globale) Maximum von f auf $\mathbb{R}$,

(b) alle lokalen Extremalstellen von f und deren Typ,

(c) das (globale) Minimum von f auf $\mathbb{R}$.

Tip zur Vereinfachung der Rechnung in Teil (b): Finden Sie A und θ, so dass $\cos(x) + \sin(x) = A \sin(x + \theta)$.

Bitte wenden!

48. Berechnen Sie die Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sin^2(x),$$

indem Sie

(a) alle Ableitungen $f^{(n)}(0)$ berechnen und in die Definition der Taylorreihe einsetzen;

(b) das Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Zusatzfrage und Hinweise: Warum ist a priori klar, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergiert? - Durch Koeffizientenvergleich sollten Sie auf die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ stoßen. - Es gibt noch eine Abkürzung; wenn Sie diese finden, können Sie zwei Zusatzpunkte erwerben.

Abgabe: Fr., 24.01.2020, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 29.01.2020 und Do., 30.01.2020