Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
18.06.2019
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

41. Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \sin(x)$.

42.

(a) In der Vorlesung wurde die Darstellung

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ bewiesen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man hierfür einen einfacheren Beweis, wenn man von der Identität $1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\ln(1+h) - \ln(1))$ ausgeht, darin $h = \frac{x}{n}$ wählt und die Stetigkeit der Exponententialfunktion ausnutzt. Führen Sie die Einzelheiten aus.

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Teil (a), dass für $x > 0$ gilt

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(x^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

Starten Sie dazu mit $1 = \exp(0) = \exp'(0)$.

43. Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Identität

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Verfahren Sie dabei wie bei der Herleitung der Logarithmusreihe.

Bitte wenden!

44. Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei sind $\sinh(w) = \frac{1}{2}(\exp(w) - \exp(-w))$ und $\tanh(w) = \dfrac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \dfrac{\exp(w) - \exp(-w)}{\exp(w) + \exp(-w)}$ die hyperbolischen Sinus- bzw. Tangensfunktionen. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y + x}{2}.$$

Abgabe: Di., 25.06.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 03.07.2019 und Do., 04.07.2019