

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

41. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(0)$. (Sollten Sie zu dem Schluss kommen, dass die Ableitung nicht existiert, so ist dies zu zeigen.)

(a) $f(x) = (x + |x|)\sqrt{|x|}$,

(b) $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2})$,

(c) $f(x) = |x|^{|x|}$, (wobei $f(0) = 0^0 = 1$ ist),

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & : \text{für } x > 0 \\ 0 & : \text{für } x \leq 0 \end{cases}$.

42. Die Funktionen f und g seien n -mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(100)}(x)$ für $f(x) = x^3 e^{-x}$.

Bitte wenden!

43. Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei sind $\sinh(w) = \frac{1}{2}(\exp(w) - \exp(-w))$ und $\tanh(w) = \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)} = \frac{\exp(w) - \exp(-w)}{\exp(w) + \exp(-w)}$ die hyperbolischen Sinus- bzw. Tangensfunktionen. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y + x}{2}.$$

44. Eine Anwendung des Monotoniesatzes aus dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften: Die Gesamtkosten zur Herstellung von x Einheiten eines Gutes seien

$$C(x) = ax^\lambda + bx + c \quad (x > 0)$$

wobei a, b, c positive Konstanten und λ ein ebenfalls positiver Exponent sind. Zeigen Sie, dass für $\lambda > 1$ die Stückkostenfunktion

$$A(x) = \frac{C(x)}{x}$$

ein isoliertes globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie dessen Lage x_{min} in Abhängigkeit von λ und den Koeffizienten. Hängt x_{min} von b ab? Was ändert sich, wenn man $0 < \lambda \leq 1$ voraussetzt?

Abgabe: Fr., 17.01.2020, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 22.01.2020 und Do., 23.01.2020