Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
11.06.2019
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

37.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a_\pm \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

38. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f. Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen $I = [0, 2]$ bzw. $J = [2, \infty)$ die Konvergenz gleichmäßig ist.

39. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat eine reelle Nullstelle, wenn n ungerade ist.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt (d. i. eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$).

Bitte wenden!

40. Es seien $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialfunktion, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ und $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$, so ist $\exp(x) > 1$,

(b) ist $x \in \mathbb{R}$ und $x < 0$, so ist $0 < \exp(x) < 1$,

(c) ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $|\exp(ix)| = 1$,

(d) ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = 0$ oder $\cos(z) = 0$, so ist z reell.

Abgabe: Di., 18.06.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 26.06.2019 und Do., 27.06.2019