Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2019/20
13.12.2019
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

33. Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z+w) = \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

34. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \dfrac{z^2}{1+|z|}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 10^{-10}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \dfrac{1}{z}$,

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := \exp(-|z|)$,

(d) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$.

Bitte wenden!

35. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass reelle Zahlen $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$ existieren, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|f(z)| \leq \alpha |z| + \beta \, .$$

36. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der (sogenannten Cauchy'schen) Funktionalgleichung

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \, .$$

Zeigen Sie:

(a) Für $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist $g(q) = g(1)q$.

(b) g ist ungerade, d. h. es gilt $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Ist g stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, so ist g überall stetig.

(d) In diesem Fall ist $g(x) = g(1)x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Dass es auch nirgends stetige Lösungen der Cauchy'schen Funktionalgleichung gibt, wurde 1905 von Georg Hamel gezeigt (Mathematische Annalen, Band 60 (1905), S. 459 ff.). Um solche zu konstruieren, fasst er die reellen Zahlen als einen unendlich-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ auf und beweist die Existenz einer Basis dieses Vektorraums (im Sinne der linearen Algebra). Aus diesem Grund werden Basen unendlich-dimensionaler Vektorräume mitunter auch als "Hamel-Basen" bezeichnet.

Abgabe: Fr., 20.12.2019, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 08.01.2020 und Do., 09.01.2020