Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
21.05.2019
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

25. Bestimmen Sie die 12-adischen Entwicklungen von $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{7}$. Vollziehen Sie dazu den Beweis von Satz 4 in Abschnitt 2.5.3 der Vorlesung nach. Für die "Ziffern" 10 und 11 können Sie gegebenenfalls die Symbole a und b verwenden.

26. (a) Die Folge $(f_n)_n$ der *Fibonacci-Zahlen* ist durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \ (n \geq 1)$$

rekursiv definiert. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

indem Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ als Teleskopsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1}$ mit geeigneten a_k darstellen.

(b) In ähnlicher Weise berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}.$$

27. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(1+i)^n}{n^2}$ (c) $a_n = \dfrac{i^{(n^2)}}{n}$

(d) $a_n = \dfrac{(3+4i)^n}{5^n \sqrt[999]{n}}$ (e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

Bitte wenden!

28. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und (b_n) eine Nullfolge, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und (b_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

(d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (b_n) beschränkt, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

Abgabe: Di., 28.05.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 05.06.2019 und Do., 06.06.2019