Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2019/20
29.11.2019
Blatt 7

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

**25.** Berechnen Sie die folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k+4}}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4k}$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3+i)^{k+1}}{5^k}$.

**26.** Die $b$-adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}\ , \quad a_k \in \{0, ..., b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0,1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+l} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $x$ rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^l}{b^l-1} \sum_{k=k_0}^{k_0+l-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

Bitte wenden!

**27. (Zum Cauchy-Kriterium für Reihen)**

(a) Es sei $(a_n)$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen, für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $a_n = \dfrac{1}{n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ divergiert. (Gilt $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$?)

Hinweis zu (b): Verdichtungssatz

**28.** Für natürliche Zahlen $N$ sollen die Reihen

$$\sum_N := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k+N)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k+N}$$

durch Teleskopieren berechnet werden. (Der Fall $N = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt.) Bringen Sie dazu die Differenzen

$$\frac{(k-1)!}{(k-1+N)!} - \frac{k!}{(k+N)!}$$

auf einen gemeinsamen Nenner.

Berechnen Sie in ähnlicher Weise für $N \geq 0$ die Reihen $\sigma_N := \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,N}$, wobei

$$a_{k,N} := \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2(k+N)+1}.$$

Als Ergebnis sollten Sie $\sigma_N = \dfrac{2^{N-1}}{N+1}\dfrac{N!}{(2N+1)!}$ erhalten.

**Abgabe:** Fr., 06.12.2019, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 11.12.2019 und Do., 12.12.2019