Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
14.05.2019
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

21. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \quad p \in \mathbb{N}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}^+$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}, \quad p \in \mathbb{N}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$

Hinweis zu (d): Sandwich-Theorem

22. Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ her.

Hinweis: Bereits für Teil (b) beachte man $\liminf_{n\to\infty}(-c_n) = -\limsup_{n\to\infty} c_n$.

23. Die b-adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}, \quad a_k \in \{0, ..., b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0, 1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+l} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall x rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^l}{b^l - 1} \sum_{k=k_0}^{k_0+l-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

Bitte wenden!

24. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}), \qquad\qquad (n \geq 1).$$

Die Startwerte a_0 und a_1 seien vorgegeben. Zeigen Sie, dass die Folge für jede Wahl der Startwerte konvergiert, und berechnen Sie

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n$$

in Abhängigkeit von a_0 und a_1.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzen $\Delta_n := a_{n+1} - a_n$. Für die Berechnung des Grenzwerts ist die geometrische Reihe nützlich.

Abgabe: Di., 21.05.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 29.05.2019 und Fr., 31.05.2019 (für die Teilnehmer der Donnerstags-Gruppen im Tutorium)