Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2019/20
15.11.2019
Blatt 5

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

17. Ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $(a_n)_n$ eine Folge, so nennt man die Folge $(a_{\sigma(n)})_n$ eine Umordnung von $(a_n)_n$. Zeigen Sie, dass die Umordnung einer Folge nicht deren Konvergenzverhalten ändert, dass also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = a.$$

Bleibt die angegebene Folgerung richtig, wenn von der Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nur vorausgesetzt wird, dass sie

(a) lediglich injektiv, aber nicht surjektiv,
(b) lediglich surjektiv, aber nicht injektiv ist?

Begründen Sie Ihre Behauptungen zu (a) und (b).

18. Für Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ definiert man $A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie für nichtleere und beschränkte Mengen A und B

(a) Sind $A \subset [0, \infty)$ und $B \subset [0, \infty)$, so gilt $\sup(A \cdot B) \le \sup A \sup B$;

(b) sind $A \subset (0, \infty)$ und $B \subset (0, \infty)$, so ist auch $\sup(A \cdot B) \ge \sup A \sup B$;

(c) die Ungleichung in (b) gilt ebenfalls für beliebige beschränkte Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$;

(d) die Ungleichung in (a) wird im allgemeinen falsch, wenn nur "$A \subset [0, \infty)$ oder $B \subset [0, \infty)$" (anstelle von "$A \subset [0, \infty)$ und $B \subset [0, \infty)$") vorausgesetzt wird.

Bitte wenden!

19. Es seien $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen, $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $a_n := \max\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$. Zeigen Sie:

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = S$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = S$.

Für (b) verwende man das "Sandwich-Theorem".

20. Die Folge $(x_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_{n+1} = 1 + \frac{3}{4x_n}, \;\; n \geq 1.$$

Zeigen Sie, daß $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist $(x_n)_n$ monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschliessende Bemerkung benutzen.

Abgabe: Fr., 22.11.2019, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 27.11.2019 und Do., 28.11.2019