Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
23.04.2019
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

9. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(a) $(1+i)^4$

(b) $\dfrac{1}{(3-i)^2}$

(c) $\dfrac{2+3i}{1-2i} + \dfrac{i}{3+i}$

(d) $i^k,\ k \in \mathbb{Z}$

10. Rekapitulieren Sie die Anordnungsaxiome (A1) - (A3) und die damit zusammenhängenden Begriffe und Bezeichnungen (kurze Zusammenfassung, ca. $\frac{1}{4}$ Seite). Beweisen Sie die Folgerungen 5., 8. und 9. aus diesen Axiomen, das sind:

(a) $x < y$ und $a < 0$ implizieren $ax > ay$,

(b) aus $x > 0$ folgt $\dfrac{1}{x} > 0$,

(c) $0 < x < y$ impliziert $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

Hierbei können Sie alle jeweils vorangehenden Folgerungen aus den Axiomen benutzen. Machen Sie in jedem Schritt kenntlich, welches Axiom bzw. welche Folgerung Sie verwenden.

11. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung: Sind für $i \in \{1, \dots, n\}$ reelle Zahlen $x_i \geq 0$ gegeben, so ist

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Bemerkung und Zusatzfrage: Sind alle x_i identisch, so erhält man die Bernoullische Ungleichung, die für $x \geq -1$ gültig ist. Gilt also die angegebene Ungleichung auch für $x_i \geq -1$ oder zumindest für $x_i \in [-1, 0]$?

Bitte wenden!

12. Für Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ definiert man $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie für nichtleere, beschränkte Mengen A und B die Identitäten

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

(Die Existenz der auftretenden Suprema und Infima wird in der Vorlesung erst noch bewiesen. Sie sei an dieser Stelle vorausgesetzt.)

Abgabe: Di., 30.04.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 08.05.2019 und Do., 09.05.2019