Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2019/20
25.10.2019
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

In den nachstehenden Aufgaben 5 und 6 seien M eine Menge mit m und N eine Menge mit n Elementen.

5. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl aller Abbildungen von M nach N,
(b) im Fall $m = n$ die Anzahl aller bijektiven Abbildungen $f : M \to N$,
(c) im Fall $m \leq n$ die Anzahl aller injektiven Abbildungen $f : M \to N$.

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese!

6. Es sei $A_{m,n}$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M nach N.

(a) Begründen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A_{m,k} = n^m.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\sum_{l=k}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \binom{l}{k} = \delta_{n,k},$$

wobei $\delta_{n,k}$ das sogenannte Kronecker-Delta bezeichnet, das die Werte 1 für $n = k$ und 0 für $n \neq k$ annimmt.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass

$$A_{m,n} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} l^m.$$

Bitte wenden!

7. Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Folgerung die Ergebnisse aus Aufgabe 2 von Blatt 0 (Präsenzaufgaben).

8. Unter Verwendung der Identität

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

zeige man für $k, m, n \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}$, (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l} = \binom{n+m}{k}$.

(Was ergibt sich in (b) für $k = m = n$?)

Abgabe: Do., 31.10.2019, 17.00 Uhr (wegen des Feiertags am darauf folgenden 01.11.)

Besprechung: Mi., 06.11.2019 und Do., 07.11.2019