Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2019
09.04.2019
Blatt 1

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

1. Es sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem auf X. Beweisen Sie die de Morgan'schen Regeln:

(a) $(\bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M)^c = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}} M^c$,

(b) $(\bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}} M)^c = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M^c$.

2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten. Hierbei sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{N}$ ein Mengensystem auf Y.

(a) $f^{-1}(\bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} N) = \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N)$,

(b) $f^{-1}(\bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} N) = \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N)$.

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

4. Man berechne $1+3$, $1+3+5$ und $1+3+5+7$, leite eine allgemeine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

her und beweise diese durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Di., 16.04.2019, 16.25 Uhr

Besprechung: Mi., 24.04.2019 und Do., 25.04.2019